Exercice| [5053] | 1| Relation triagonométrique | ESSEC 2013 Filière ECS

On définit, sous réserve d'existence, la fonction arctangente, notée $\arctan$ par :

$$\arctan : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

(1). Vérifier que la fonction $\arctan$ et bien définie sur $\mathbb{R}$.

(2). Montrer que $\arctan$ est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$.

(3). Déterminer l'expression de $\arctan'(x)$ pour tout x réel.

(4). Montrer que $\arctan$ admet une limite finie, notée provisoirement ℓ, en $+\infty$, et justifier que $\arctan$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\ell;\ell[$.

(5). Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, calculer $\arctan(\tan(x))$, et en déduire la valeur de ℓ.

(6). Justifier que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$.

(7). Montrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Cette relation reste-t-elle valable sur $\mathbb{R}_-^*$?

Éléments de correction

(1). La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+^2}\,\mathrm{d}t$, qui est une intégrale définie, existe, et par suite la fonction $\arctan$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a $\arctan(0) = 0$.

(2). La fonction $\arctan$ est dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}$, et de dérivée : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Par suite, puisque la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$, il est en alors de même pour $\arctan$.

Il est immédiat que $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et que si $x \in \mathbb{R}$, alors à l'aide du changement de variable $t = -u$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}$, il vient $\arctan(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} \times (-1)\,\mathrm{d}u = -\arctan(x)$ et donc que $\arctan$ est impaire.

(3). La dérivée de la fonction $\arctan$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(4). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Or puisque pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe, et par conséquent que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)$ existe.

Par ailleurs, la dérivée de $\arctan$ étant clairement strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $\arctan$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\ell;\ell[$ (car $\arctan$ est impaire).

(5). Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction $f : x \longmapsto \arctan(\tan(x))$ est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ de dérivée : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \left(1+\tan^2(x)\right)\dfrac{1}{1+\tan^2(x)} = 1$. Par suite, on en déduit que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = x + C$ où $C \in \mathbb{R}$. Or $f(0) = 0 = 0 + C$ donc $C = 0$ et ainsi, $\arctan(\tan(x)) = x$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Par suite, puisque $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \arctan(\tan(x))$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{2}$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, on en déduit que $\ell = \dfrac{\pi}{2}$.

(6). Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On applique l'inégalité des accroisements finis à la fonction $\arctan$ sur l'intervalle $[x;y]$, sur lequel $\arctan$ y est continue et dérivable sur $]x;y[$, et telle que, pour tout $t \in [x;y]$, $|\arctan'(t)| = \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$. Ainsi, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq 1 \times |x-y|$.

(7). Il suffit de dériver la fonction $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de voir qu'elle est de dérivée nulle, donc constante, et de prendre la limite en $+\infty$ pour identifier cette constante.

On pourrait se demander ce que devient cette relation sur $\mathbb{R}_-^*$...