Exercice [5043] | 1| Diagonalisation d'un endomorphisme | ECRICOME 2010 Filière ECS

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On considère l'application f, qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $f(P) = P'' - 4XP'$.

(1). Étude de f : soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

(a). Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b). Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f\left(X^k\right)$ pour $k \in [\![2; n]\!]$.
Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.

(c). Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres et de dimension 1.

(d). Soit P un vecteur propre d ef associé à la valeur propre λ.
Établir que $\lambda = -4\deg(P)$.
En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que :

$$(\mathcal{E}_n) : \quad f(H_n) = -4nH_n$$

(2). Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a). Établir en dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad f\left(H_n'\right) = -4(n-1)H_n'$$

En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0$$

(b). Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?
Calculer alors H_2 et H_3.

(c). D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}$$

Écrire un programme en Pascal calculant u_{2010}.

Éléments de correction

(1).(a). Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $f(P)$ est à coefficients réels et tel que $\deg(f(P)) \leq \max\left(\deg(P''), \deg(XP')\right) \leq \max(n-2, 1+(n-1)) = n$, donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $(P, Q) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$ et tout $co, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, on a $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)'' - 4X\left(\lambda P + \mu Q'\right) = \lambda(P'' - 4XP') + \mu(X'' - 4XQ') = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ et $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$.

(b). Un calcul direct donne $f(1) = 0$, $f(X) = -4X$ et $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 4kX^k$.
Par conséquent, la matrice A_n de f dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ s'écrit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ 0 & -4 & 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & -8 & \ddots & \ddots & & & (0) & \\ & & & \ddots & & k(k-1) & & & \\ & & & & \ddots & 0 & \ddots & & \\ & & & & & -4k & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ & & (0) & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & & -4n \end{pmatrix}$$

et elle est bien triangulaire supérieure.

(c). Puisque la matrice A_n est triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale et elles forment l'ensemble $\{-4k, k \in [\![0; n]\!]\}$. La matrice A_n admet ainsi $n+1$ valeurs propres réelles distinctes et elle est de taille $n+1$, donc elle est diagonalisable, ainsi que f par voie de conséquence, et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

(d). Puisque P est un vecteur propre de f, il est nonnul, donc il possède un degré $N \geq 0$. Alors on peut écrire $P(X) = a_N X^N + Q_N$ avec $a_N \neq 0$ et $\deg(Q_N) > N$, ce qui donne : $f(P) = \lambda P \quad \Leftrightarrow \quad -4Na_N X^N + R_N - \lambda a_N X^N + Q_N$ avec $\deg(R_N) < N$.
Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit l'égalite $-4Na_N = \lambda A_N$ d'où puisque $a_N \neq 0$, on en déduit $\lambda = -4N = -4\deg(P)$.
Puisque $-4n$ est une valeur propre de f, il existe un polynôme non nul P tel que $f(P) = -4nP$. D'après l'égalité précédente, on en déduit que $4n = \deg(P_n) \quad \Leftrightarrow \deg(P) = n$. Si l'on note a_n le coefficient dominant de P, alors $H_n = \frac{1}{a_n}P_n$ est un polynôme unitaire vérifiant $f(H_n) = f\left(\frac{1}{a_n}P_n\right) = \frac{1}{a_n}f(P) = \frac{1}{a_n} \times -4nP = -4nH_n$, ce qui justifie l'existence de H_n.
En outre, si V_n est un autre polynôme non nul et unitaire vérifiant $f(V_n) = -4nV_n$, alors V_n est de degré n, et il est colinéaire à H_n. Ainsi, il existe un réel C tel que $V_n = CH_n$. Les polynômes V_n et H_n étant de degré n, et unitaires, on a obligatoirement $C = 1$, ce qui justifie l'unicité de H_n.

(2).(a). En dérivant la relation $\mathcal{E}_n$, on a $H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n \Leftarrow H_n''' - 4H_n' = -4nH_n'$ ce qui donne $H_n''' - 4XH_n'' = -4(n-1)H_n'$ et donc $f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.
Par conséquent, H_n' appartient à l'espace propre de f associé à la valeur propre $-4(n-1)$ qui est de dimension 1, et engendré par H_{n-1} donc il existe un réel C tel que $H_n' = CH_{n-1}$. Le polynôme H_n étant unitaire, le coefficient dominant de CH_{n-1} vaut C et celui de H_n' vaut n, donc $C = n$ c'est à dire : $\forall n \geq 1, H_n' = nH_{n-1} \Leftarrow H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n_1}$. En utilisant la relation $\mathcal{E}_n$, on en déduit que : $\forall n \geq 2, H_n' - 4XH_n' = -4nH_n \quad \Leftrightarrow \quad n(n-1)H_{n-2} - 4nXH_{n_1} = -4nH_n$.
En divisant par n qui est non nul, on a $(n-1)H_{n-2} - 4XH_{n-1} = -4H_n \quad \Leftrightarrow H_n = XH_{n-1} - \frac{n-1}{4}H_{n-2}$.

(b). Puisque $f(1) = 0$, donc 1 est un polynôme unitaire appartenant à l'espace propre de f associé à la valeur propre 0, donc par unicité de H_0, on a $H_0 = 1$.
Puisque $f(X) = -4X$, X est un polynôme unitaire appartenant à l'espace propre de f associé à la valeur propre -4, donc par unicité de H_1, on a $H_1 = X$.
D'après la question précédente, on a : $H_2 = X^2 - \frac{1}{4}$ et $H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X$.

(c). La procédure suivante permet d'avoir u_{2010} :