Exercice| [5042] | 1| Suites imbriquées | ESSEC 2007 Filière ECE

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0$$

et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

et on note A la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1). (a). Reconnaître, pour tout entier naturel n le produit AX_n.

(b). En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.

(2). (a). Démontrer que A admet une seule valeur propre.

(b). Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à l'unique valeur propre. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(3). On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a). Déterminer une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et que les vecteurs e_1', e_2', e_3' aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.

On notera dorénavant $\mathcal{B}'$ la base (e_1', e_2', e_3').

(b). À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante T :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

(4). Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(a). Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

(b). Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

(c). Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.

Éléments de correction

(1). (a). On a $AX_n = X_{n+1}$.

(b). La suite est donc « géométrique matricielle » de raison A et $X_n = A^n X_0$

(2). (a). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(A - \alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} (3-\alpha)x - y + z = 0 \\ x + (2-\alpha)y = 0 \\ y + (1-\alpha)z = 0 \end{cases} \iff$$

$$(S)\begin{cases} [(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha) + (1-\alpha) + 1]\, z = 0 \\ x = (2-\alpha)(1-\alpha)z = 0 \\ y = -(1-\alpha)z \end{cases}$$

On a : $[(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha) + (1-\alpha) + 1] = -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 12\alpha + 8$.

2 est racine du polynôme $-x^3+6x^2-12x+8$, donc factorisable par $x-2$, et on obtient $-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = (x-2)\left(-x^2 + 4x + 4\right)$. Par ailleurs, 2 est racine double de $-x^2 + 4x + 4$ et on obtient $-x^2 + 4x + 4 = -(x-2)^2$ et $-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = -(x-2)^3$.

Donc si $\alpha \neq 2$ alors $(S) \iff x = y = z = 0$ et α n'est pas valeur propre.

Et si $\alpha = 2$ alors $(S) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$

Ainsi, la seule valeur propre de A est 2.

(b). Le sous espace propre associé à 2 est $E_2 = \operatorname{Vect}((0,1,1))$. La famille $((0,1,1))$ formée d'un seul vecteur non nul est libre et génératrice de E_2. Donc $\dim(E_2) = 1$. La somme des dimension des sous espaces propres de A , matrice d'ordre 3, est 1, et par suite A n'est pas diagonalisable.

(3). (a). La matrice de f dan la base $\mathcal{B}'$ est T si et seulement si :

$f(e_1') = 2e_1'$: $f(e_2') = 2e_2' + e_1'$ et $f(e_3') = 2e_3' + e_2'$

— Soit $e_1' = (0,1,1)$ vecteur propre associé à 2.

— $e_2' = (x, y, -1)$ alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)(e_2') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 1 \\ x + 2y \\ y - 1 \end{pmatrix}$

donc :

$$f(e_2') = 2e_2' + e_1' \iff \begin{cases} 3x - y - 1 = 2x + 0 \\ x + 2y = 2y + 1 \\ y - 1 = -2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

et par suite $e_2' = (1, 0, -1)$

— $e_3' = (x, y, 2)$ alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)(e_3') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 2 \\ x + 2y \\ y + 2 \end{pmatrix}$

donc :

$$f(e_2') = 2e_2' + e_1' \iff \begin{cases} 3x - y + 2 = 2x + 1 \\ x + 2y = 2y + 0 \\ y + 2 = 4 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

soit finalement $e_3' = (0, 1, 2)$

Reste à vérifier que (e_1', e_2', e_3') est bien une base (libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$) :

Soient α, β, γ réels. Si $\alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3' = 0$ alors :

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\gamma \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille est libre et $\mathcal{B}' = ((0,1,1), (1,0,-1), (0,1,2))$ est bien une base.

(b). Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$
et comme $T = 2I + N$ et que $N \cdot 2I = 2N = 2I \cdot N$ alors

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ &= 2^{n-2} \left(4I + 2nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right) \\ &= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

formule qui est encore valable pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

(4). (a). Par les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
La formule de changement de base donne : $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = PTP^{-1}$, et ainsi : $A^n = PT^nP^{-1}$.

(b). On montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ par la méthode de son choix : résolution d'un système, opérations simultanées sur la matrice identité par exempe.s

(c). On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= PT^n \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= P 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n + \frac{1}{2}n(n-1) - 4 \\ 2n + 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 2n + 4 \\ 2n + \frac{1}{2}n(n-1) \\ \frac{1}{2}n(n-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne : $\begin{array}{l} u_n = 2^{n-2}(2n+4) \\ v_n = 2^{n-2}\left[2n + \frac{1}{2}n(n-1)\right] \\ w_n = 2^{n-3}n(n-1) \end{array}$.