Exercice| [5041] | 1| Tirages dans une urne | EML 2009 Filière ECE

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0<p<1$, $0<q<1$ et $p+q=1$.

(1). Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(a). Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k\geq 1$, donner $\mathrm{P}(T=k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.

(b). En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

(2). Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z. la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y=1)\cup(Z=1)$ est égale à 1.
Pour tout entier naturel non nul i, on note :

B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

(a). (i). Montrer, pour tout entier $k\geq 2$: $\mathrm{P}(X=k)=q\,p^{k-1}+p\,q^{k-1}$.

(ii). Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k)=1$

(iii). Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$.

(b). (i). Pour tout entier $k\geq 2$, déterminer $\mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1))$
(On distinguera les cas $k=2$ et $k\geq 3$.)

(ii). En déduire : $\mathrm{P}(Y=1)=q(1+p)$.

(iii). Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y)=\dfrac{1}{q}\left(1-p+p^2\right)$.

(c). Donner la loi de Z et son espérance.

(d). Montrer que les variables aléatoires Y Z et $X-1$ sont égales.

(e). Montrer que le couple (Y,Z) admet une covariance et exprimer $\mathrm{cov}(Y,Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.

Éléments de correction

(1). (a). Tant que l'on n'a pas de boule noire, la probabilité d'en obtenir une reste q (boules équiprobables)
Donc T est le rang du premier succès dans un processus sans mémoire et ainsi,

$$T\hookrightarrow\mathcal{G}(q)\,,\ E(T)=\frac{1}{q},\ V(T)=\frac{p}{q^2}\text{ et pour tout }k\geq 1:\mathrm{P}(T=k)=p^{k-1}q.$$

(b). $[U=k]$ signifie que $[T=k+1]$ donc $U=T-1$ et donc U a une espérance et une variance, $E(U)=E(T)-1=\dfrac{p}{q}$ et $V(U)=V(T)=\dfrac{p}{q^2}$.

Bilan : signification de la variable aléatoire

(2). (a). (i). $[X=k]$ signifie que l'on a effectué k tirages : on a donc eu $k-1$ blanches puis une noire ou $k-1$ noires puis une blanche.
$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(N_1)\mathrm{P}_{N_1}(N_2)\cdots\mathrm{P}_{N1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k)+\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}_{B_1}(B_2)\cdots\mathrm{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)$ le conditionnement indiquant que l'expérience se poursuit.
D'où, pour tout entier $k\geq 2$: $\mathrm{P}(X=k)=q\,p^{k-1}+p\,q^{k-1}$.

(ii). On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N}\mathrm{P}(X=k)&=\sum_{k=2}^{N}\left[q\,p^{k-1}+p\,q^{k-1}\right]\\&=q\sum_{h=1}^{N-1}p^h+p\sum_{h=1}^{N-1}q^h\\&=q\sum_{h=0}^{N-1}p^h-q+p\sum_{h=0}^{N-1}q^h-p\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}q\frac{1}{1-p}-q+p\frac{1}{1-q}-p\end{aligned}$$

car $|p|<1$ et $|q|<1$ et comme $p+q=1$, et finalement, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k)=1$

(iii). Pour $k\geq 2$, on a $|k\mathrm{P}(X=k)|=k\mathrm{P}(X=k)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N}k\mathrm{P}(X=k)&=q\sum_{k=2}^{N}k\,p^{k-1}+p\sum_{k=2}^{N}k\,q^{k-1}\\&=q\sum_{k=1}^{N}k\,p^{k-1}-q+p\sum_{k=1}^{N}k\,q^{k-1}-p\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}q\frac{1}{(1-p)^2}-q+p\frac{1}{(1-q)^2}-\end{aligned}$$

donc la série converge absolument, X a une espérance et $E(X)=\dfrac{1}{q}-q+\dfrac{1}{p}-p$

et ainsi, X admet une espérance et : $E(X)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$.

(b). (i). Pour $k=2$, $(X=2)\cap(Y=1)$ signifie que l'on a effectué 2 tirages et obtenu une seule blanche (donc une seule noire)
On a donc pu avoir $N_1\cap B_2$ ou $B_1\cap N_2$ (incompatibles) et $\mathrm{P}((X=2)\cap(Y=1))=pq+qp=2pq$.
Si $k\geq 3$ alors $[X=k]\cap[Y=1]$ signifie que l'on n'a obtenu qu'une seule blanche (et plusieurs noires) et donc s'est arrêté sur une boule blanche.
$[X=k]\cap[Y=1]=N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k$ et $\mathrm{P}([X=k]\cap[Y=1])=q^{k-1}p$
Ainsi : $\mathrm{P}([X=2]\cap[Y=1])=2pq$ et pour $k\geq 3$: $\mathrm{P}([X=k]\cap[Y=1])=q^{k-1}p$

(ii). La loi de Y est une loi marginale du couple (X,Y)donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}([X=k]\cap[Y=1]) \\
&= \mathrm{P}((X=2)\cap(Y=1)) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1)) \\
&= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{h=2}^{+\infty} q^h \\
&= 2pq + p\left[\sum_{h=0}^{+\infty} q^h - 1 - q\right] \\
&= 2pq + p\left[\frac{1}{1-q} - 1 - q\right] \\
&= pq + \frac{p}{p} - p = 1 - p + pq \\
&= q + pq
\end{aligned}$$

D'où : $\mathrm{P}(Y=1) = q(1+p)$.

(iii). $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \geq 2$ quand $(Y=n)$ on a plus d'une blanche, donc on s'arrête sur une boule noire.

$[Y=n]$ signifie donc que l'on a eu n blanches puis une boule noire. Donc $\mathrm{P}(Y=n) = p^n q$. Et finalement : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}(Y=1) = q(1+p)$ et $\mathrm{P}(Y=n) = p^n q$ pour $n \geq 2$.

(c). En inversant les rôles de blanc et noir, on inverse les rôles de Y et de Z. La loi de Z est donc la même que celle de Y en inversant les rôles de p et de q.

On a donc : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(Z=1) = p(1+q)$ et $\mathrm{P}(Z=n) = q^{n-1}p$ pour $n \geq 2$ ainsi que $E(Z) = \frac{1}{p}\left(1-q+q^2\right)$

(d). Pour tout $k \geq 1$: $(X-1=k)$ signifie qu'il y a eu k tirages avant le changement de couleur. Si les tirages se finissent par noir, on a alors $Y=k$ et $Z=1$ donc $Y\ Z=k$. Si les tirages se finissent par blanc, on a alors $Y=1$ et $Z=k$ donc $Y\ Z=k$. Par suite : $Y\ Z = X-1$.

(e). Y et Z ont une espérance. X a une espérance donc $X-1$ et $Y\ Z$ également $E(Y\ Z) = E(X)-1$. Donc (Y,Z) admet une covariance et $\operatorname{cov}(Y,Z) = E(Y\ Z) - E(Y)\,EZ$. Ainsi, $\operatorname{cov}(Y,Z) = E(X) - E(Y)\,E(Z) - 1$.