Exercice| [5040] | 1| Suite de polynômes | EML 2011 Filière ECS

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications :

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n e^{-x}}{n!} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad L_n :: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x f_n^{(n)}(x) \end{array} \right.$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n^e de f_n.

(1). Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

(2). Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$

(3). En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

(4). Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$

(5). En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$

(6). Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$

(7). En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x).$

(8). Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad ,\forall x \in \mathbb{R}, \quad xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0.$

Éléments de correction

(1). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} f_0(x) = e^{-x} & f_0^{(0)}(x) = f_0(x) = e^{-x} \\ f_1(x) = xe^{-x} & f'_1(x) = (1-x)e^{-x} \\ f_2(x) = \dfrac{x^2}{2} e^{-x} & f'_2(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) e^{-x},\ f''_2(x) = \left(1 - 2x + \dfrac{x^2}{2}\right) e^{-x} \end{array}$$

donc :$L_0(x) = 1 \quad L_1(x) = 1 - x \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$

(2). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de Leibniz donne :

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{-x}\right)^{(k)} (x^n)^{(n-k)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{(n-(n-k))!} x^{n-(n-k)} \\ &= e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{k!} x^k \end{aligned}$$

d'où $L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$

(3). L_n étant somme de monômes est une fonction polynomiale de degré n, et de coefficient du terme de plus haut degré et $\dfrac{(-1)^n}{n!} \dbinom{n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

(4). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} e^{-x}$; ainsi, $f'_{n+1}(x) = \dfrac{x^n}{n!} e^{-x} - \dfrac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} e^{-x}$, et donc $f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

(5). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $L_{n+1}(x) = e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x)$ donc

$$\begin{aligned} L'_{n+1}(x) &= e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= e^x \left(f'_{n+1}\right)^{(n+1)} + e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= e^x \left(f_n - f_{n+1}\right)^{(n+1)}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) \text{ d'aprés la question } \mathbf{9} \\ &= e^x f_n^{(n+1)}(x) - e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= e^x f_n^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x)$,

$$L'_n(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x) + e^x f_n^{n}(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x) + L_n(x),$$

donc $e^x f_n^{(n+1)}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$ d'où, en reportant dans L'_{n+1}, on obtient $L'_n(x) = L'_{n+1}(x) + L_n(x)$.

(6). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} = \dfrac{x}{n+1} f_n(x)$.

(7). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $(n+1)L_{n+1}(x) = e^x \left(xf_n\right)^{(n+1)}(x)$. Par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} (n+1)L_{n+1}(x) &= e^x \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} f_n^{(n+1-k)}(x) \\ &= e^x x f_n^{(n+1)}(x) + e^x (n+1) f_n^{(n)}(x) + 0 \\ &= xL'_{n+1}(x) + (n+1)L_n(x) \\ &= x(L'_n(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n(x) \end{aligned}$$

donc on trouve bien $(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$.

(8). Par dérivation de la relation précédente :

$$\begin{aligned} & (n+1)L'_{n+1} = L'_n(x) + xL''_n(x) - L_n(x) + (n+1-x)L'_n(x) \\ \Leftrightarrow\ & (n+1)(L'_n(x) - L_n(x)) = L'_n(x) + xL''_n(x) - L_n(x) + (n+1-x)L'_n(x) \\ \Leftrightarrow\ & xL''_n(x) + [1 - (n+1) + (n+1-x)]L'_n(x) + (n+1-1)L_n(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0. \end{aligned}$$