Exercice| [5021] | 1| Caractère générateur obtenu par combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_6)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^5$.

On considère alors la famille $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_5)$ où : $\begin{cases} v_1 &= u_1 - u_6 \\ v_2 &= u_2 - u_6 \\ v_3 &= u_3 - u_6 \\ v_4 &= u_4 - u_6 \\ v_5 &= u_5 - u_6 \end{cases}$

La famille $\mathcal{G}$ est-elle encore génératrice de $\mathbb{R}^5$?

Pistes de réflexion

- On reviendra à la définition de ce qu'est une famille génératrice, c'est à dire à la capacité que l'on a de décomposer un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^5$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.
- La famille $\mathcal{G}$ étant construite à partir de $\mathcal{F}$, on transférera le problème de la décomposition d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^5$ sur $\mathcal{G}$, à un problème de décomposition d'un vecteur quelconque sur $\mathcal{F}$.

Éléments de correction

Étude d'une première famille de vecteurs On considère, les vecteurs :

$$\begin{cases} u_1 &= (1,0,0,0,0) \\ u_2 &= (1,1,0,0,0) \\ u_3 &= (1,1,1,0,0) \\ u_4 &= (1,1,1,1,0) \\ u_5 &= (1,1,1,1,1) \\ u_6 &= (1,1,1,1,1) \end{cases}$$

On note alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle de la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_6)$.

Puisque $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^5$, par théorème :

$$(\mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}^5) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}\,(A) = 5)$$

Il est immédiat ici que $\mathrm{rg}\,(A) = 5$ et donc que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^5$.

La famille $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_5)$ construite à partir des relations

$$\begin{cases} v_1 &= u_1 - u_6 \\ v_2 &= u_2 - u_6 \\ v_3 &= u_3 - u_6 \\ v_4 &= u_4 - u_6 \\ v_5 &= u_5 - u_6 \end{cases}$$

est donc exactement la famille donnée par les vecteurs $\begin{cases} v_1 &= (0,-1,-1,-1,-1) \\ v_2 &= (0,0,-1,-1,-1) \\ v_3 &= (0,0,0,-1,-1) \\ v_4 &= (0,0,0,0,-1) \\ v_5 &= (0,0,0,0,0) \end{cases}$

En notant $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle de la famille $\mathcal{G}$, par un argument semblable on peut établir que la famille $\mathcal{G}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^5$, puisque par échelonnement en lignes de B, on peut montrer que cette dernière est de rang 4 seulement.

Étude d'une deuxième famille de vecteurs On considère, les vecteurs

$$\begin{cases} u_1 &= (1,0,0,0,0) \\ u_2 &= (0,1,0,0,0) \\ u_3 &= (0,0,1,0,0) \\ u_4 &= (0,0,0,1,0) \\ u_5 &= (0,0,0,0,1) \\ u_6 &= (1,1,1,1,1) \end{cases}$$

On note alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle de la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_6)$.

Puisque $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^5$, par théorème :

$$(\mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}^5) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}\,(A) = 5)$$

Il est immédiat ici que $\mathrm{rg}\,(A) = 5$ et donc que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^5$.

La famille $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_5)$ construite à partir des relations

$$\begin{cases} v_1 &= u_1 - u_6 \\ v_2 &= u_2 - u_6 \\ v_3 &= u_3 - u_6 \\ v_4 &= u_4 - u_6 \\ v_5 &= u_5 - u_6 \end{cases}$$

est donc exactement la famille donnée par les vecteurs $\begin{cases} v_1 &= (0,-1,-1,-1,-1) \\ v_2 &= (-1,0,-1,-1,-1) \\ v_3 &= (-1,-1,0,-1,-1) \\ v_4 &= (-1,-1,-1,0,-1) \\ v_5 &= (-1,-1,-1,-1,0) \end{cases}$

En notant $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle de la famille $\mathcal{G}$, par un argument semblable on peut établir que la famille $\mathcal{G}$ est génératrice de $\mathbb{R}^5$, puisque par échelonnement en lignes de B, on peut montrer que cette dernière est de rang 5.

Conclusion : on vient de proposer un exemple qui affirme que la famille $\mathcal{G}$ construite à partir de la famille $\mathcal{F}$ est encore génératrice de $\mathbb{R}^5$, mais on dispose aussi d'un autre exemple qui affirme que la famille $\mathcal{G}$ construite à partir de la famille $\mathcal{F}$ n'est plus génératrice de $\mathbb{R}^5$.

On dispose donc d'un contre-exemple qui invalide le résultat général que l'exercice supposait pouvoir nous voir démontrer.

Ainsi, on ne peut répondre en général à cette question.