Exercice| [4953] | 1| Résolution d'équations du degré 2

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

(1). $(\star_1) : x^2 - 5x + 6 = 2(x-2)(x+1)$

(2). $(\star_2) : (x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - 6$

(3). $(\star_3) : x(x-1)(x-2) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

(4). $(\star_4) : (x-1)(x+2) - (x-3)(x+1) = x^2 - 2x + 7$

Pistes de réflexion

Pour chacune de ces équations :

— on développera chacun des membres de l'équation et on se ramèra à une équation dont le membre de droite est nul ;

— on s'assurera alors qu'il s'agit bien d'une équation de degré 2 ;

— on explicitera et calculera le discriminant de cette équation ;

— on donnera les solutions de l'équation en ayant au préalable discuté en fonction du signe du discriminant.

Éléments de correction

(1). On a tout d'abord que :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ 2(x-2)(x+1) &= 2\left(x^2 + x - 2x - 2\right)\\ &= 2\left(x^2 - x - 2\right)\\ &= 2x^2 - 2x - 4\end{aligned}$$

Par suite, il vient que :
$$\begin{aligned}\left(x^2 - 5x + 6 = 2\,(x-2)\,(x+1)\right) &\Leftrightarrow \left(x^2 - 5x + 6 = 2x^2 - 2x - 4\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x^2 - 5x + 6 - 2x^2 + 2x + 4 = 0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(-x^2 - 3x + 10 = 0\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $(\star_1)$ se ramène bien à une équation du second degré.
Le discriminant Δ de l'équation $-x^2 - 3x + 10 = 0$ est donné par :
$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 10\\ &= 9 + 40\\ &= 49\end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $-x^2 - 3x + 10 = 0$ et donc $(\star_1)$ admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :
$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-3)+\sqrt{49}}{2\times(-1)}\\ &= \frac{3+7}{-2}\\ &= \frac{10}{-2}\\ &= -5\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}x_2 &= \frac{-(-3)-\sqrt{49}}{2\times(-1)}\\ &= \frac{3-7}{-2}\\ &= \frac{-4}{-2}\\ &= 2\end{aligned}$$

(2). On a tout d'abord que :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x+2) &= x^2 + 2x - x - 2\\ &= x^2 + x - 2\end{aligned}$$

Par suite, il vient que :
$$\begin{aligned}\left((x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - 6\right) &\Leftrightarrow \left(x^2 + x - 2 = 2x^2 + 4x - 6\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + x - 2 - 2x^2 - 4x + 6 = 0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(-x^2 - 3x + 4 = 0\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $(\star_2)$ se ramène bien à une équation du second degré.
Le discriminant Δ de l'équation $-x^2 - 3x + 4 = 0$ est donné par :
$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4\\ &= 9 + 16\\ &= 25\end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $-x^2 - 3x + 4 = 0$ et donc $(\star_2)$ admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :
$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times(-1)}\\ &= \frac{3+5}{-2}\\ &= \frac{8}{-2}\\ &= -4\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}x_2 &= \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times(-1)}\\ &= \frac{3-5}{-2}\\ &= \frac{-2}{-2}\\ &= 1\end{aligned}$$

(3). On a tout d'abord que :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)(x-2) &= \left(x^2 - x\right)(x-2)\\ &= x^3 - 3x^2 - x^2 + 2x\\ &= x^3 - 3x^2 + 2x\end{aligned}$$

Par suite, il vient que :
$$\begin{aligned}\left(x(x-1)(x-2) = x^3 + 4x^2 + x - 6\right) &\Leftrightarrow \left(x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + 4x^2 + x - 6\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x^3 - 3x^2 + 2x - x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(-7x^2 + x + 6 = 0\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $(\star_3)$ se ramène bien à une équation du second degré.
Le discriminant Δ de l'équation $-7x^2 + x + 6 = 0$ est donné par :
$$\begin{aligned}\Delta &= (1)^2 - 4 \times (-7) \times 6\\ &= 1 + 168\\ &= 169\end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $-7x^2 + x + 6 = 0$ et donc $(\star_3)$ admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :
$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-1+\sqrt{169}}{2\times(-7)}\\ &= \frac{-1+13}{-14}\\ &= \frac{12}{-14}\\ &= -\frac{6}{7}\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}x_2 &= \frac{-1-\sqrt{169}}{2\times(-7)}\\ &= \frac{-1-13}{-14}\\ &= \frac{-14}{-14}\\ &= 1\end{aligned}$$

(4). On a tout d'abord que :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x+2) - (x-3)(x+1) &= x^2 + 2x - x - 2 - x^2 - x + 3x + 3\\ &= 3x + 1\end{aligned}$$

Par suite, il vient que :
$$\begin{aligned}\left((x-1)(x+2) - (x-3)(x+1) = x^2 - 2x + 7\right) &\Leftrightarrow \left(3x + 1 = x^2 - 2x + 7\right)\\ &\Leftrightarrow \left(3x + 1 - x^2 + 2x - 7 = 0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(-x^2 + 5x - 6 = 0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x^2 - 5x + 6 = 0\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $(\star_4)$ se ramène bien à une équation du second degré.

Le discriminant Δ de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & (-5)^2 - 4 \times (1) \times 6 \\ & = & 25 - 24 \\ & = & 1 \end{array}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ et donc $(\star_4)$ admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} \\ & = & \dfrac{5+1}{2} \\ & = & \dfrac{6}{2} \\ & = & 3 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} x_2 & = & \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} \\ & = & \dfrac{5-1}{2} \\ & = & \dfrac{4}{2} \\ & = & 2 \end{array}$$