Exercice| [4917] | 1| Matrices d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$

On considére l'application f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+z-t, x-y-z+t, x-y+z+2t, x+y+2z-2t) \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(3). Déterminer le rang de A. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans cette base.

(3). On obtiendra le rang de A par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de f. Le caractère bijectif de f proviendra de la comparaison du rang de f à la dimension de $\mathbb{R}^4$.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \text{est linéaire} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall u & \in & \mathbb{R}^4 \\ \forall v & \in & \mathbb{R}^4 \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. , f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) \right)$$

Soient alors $\left\{ \begin{array}{rcl} u = (x,y,z,t) & \in & \mathbb{R}^4 \\ v = (x',y',z',t') & \in & \mathbb{R}^4 \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$.

On pose $w = \lambda u + v$ et en notant $w = (x'', y'', z'', t'')$, on a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & \lambda x + x' \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ z'' & = & \lambda z + z' \\ t'' & = & \lambda t + t' \end{array} \right.$$

Montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(w) & = & (x''+y''+z''-t'', x''-y''-z''+t'', \\ & & x''-y''+z''+2t'', x''+y''+2z''-2t'') \\ & = & (\lambda x + x' + \lambda y + y', \lambda z + z' - (\lambda t + t'), \\ & & \lambda x + x' - (\lambda y + y') - (\lambda z + z') + \lambda t + t', \\ & & \lambda x + x' - (\lambda y + y') + \lambda z + z' + 2(\lambda t + t'), \\ & & \lambda x + x' + \lambda y + y' + 2(\lambda z + z') - 2(\lambda t + t')) \\ & = & (\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z' - \lambda t - t', \\ & & \lambda x + x' - \lambda y - y' - \lambda z - z' + \lambda t + t', \\ & & \lambda x + x' - \lambda y - y' + \lambda z + z' + 2\lambda t + 2t', \\ & & \lambda x + x' + \lambda y + y' + 2\lambda z + z' - 2\lambda t - 2t') \\ & = & (\lambda x + \lambda y + \lambda z - \lambda t + x' + y' + z' - t', \\ & & \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda t + x' - y' - z' + t', \\ & & \lambda x - \lambda y + \lambda z + 2\lambda t + x' - y' + z' + 2t', \\ & & \lambda x + \lambda y + 2\lambda z - 2\lambda t + x' + y' + 2z' - 2t') \\ & = & (\lambda x + \lambda y + \lambda z - \lambda t, \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda t + , \\ & & \lambda x - \lambda y + \lambda z + 2\lambda t +, \lambda x + \lambda y + 2\lambda z - 2\lambda t +) \\ & & \underbrace{(x'+y'+z'-t', x'-y'-z'+t', x'-y'+z'+2t', x'+y'+2z'-2t')}_{=f(v)} \\ & = & \underbrace{(x+y+z-t, x-y-z+t, x-y+z+2t, x+y+2z-2t)}_{=f(u)} + f(v) \\ & = & \lambda f(u) + f(v) \end{array}$$

Par conséquent $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ est linéaire, et c'est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

(2). En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ où $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$, un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & (1+0+0-0, 1-0-0+0, 1-0+0+2\times 0, 1+0+2\times 0 - 2\times 0) \\ & = & (1,1,1,1) \\ f(e_2) & = & (0+1+0-0, 0-1-0+0, 0-1+0+2\times 0, 0+1+2\times 0-2\times 0) \\ & = & (1,-1,-1,1) \\ f(e_3) & = & (0+0+1-0, 0-0-1+0, 0-0+1+2\times 0, 0+0+2\times 1-2\times 0) \\ & = & (1,-1,1,2) \\ f(e_4) & = & (0+0+0-1, 0-0-0+1, 0-0+0+2\times 1, 0+0+2\times 0-2\times 1) \\ & = & (-1,1,2,-2) \end{array}$$

et par suite, la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(3). On recherche le rang de la matrice A par un échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}\,(A) = 4$, et par suite que $\mathrm{rg}\,(f) = 4$ puisque par théorème le rang de f est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.
Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de rang 4. Comme $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 4$, d'après le théorème de caractérisation des automorphismes, f est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$.