Exercice| [4916] | 1| Matrices d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On considére l'application f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y-z, x-2y+z) \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3). Déterminer le rang de A. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans cette base.

(3). On obtiendra le rang de A par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de f. Le caractère bijectif de f proviendra de la comparaison du rang de f à la dimension de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{est linéaire} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall u & \in & \mathbb{R}^3 \\ \forall v & \in & \mathbb{R}^3 \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. , f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) \right)$$

Soient alors $\left\{ \begin{array}{rcl} u = (x,y,z) & \in & \mathbb{R}^3 \\ v = (x',y',z') & \in & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$.

On pose $w = \lambda u + v$ et en notant $w = (x'', y'', z'')$, on a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & \lambda x + x' \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ z'' & = & \lambda z + z' \end{array} \right.$$

Montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(w) & = & (x''+y''+z'', x''-y''-z'', x''-2y''+z'') \\ & = & (\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z', \\ & & \quad \lambda x + x' - (\lambda y + y') - (\lambda z + z'), \\ & & \quad\quad \lambda x + x' - 2(\lambda y + y') + \lambda z + z') \\ & = & (\lambda x + \lambda y + \lambda z + x' + y' + z', \\ & & \quad \lambda x + x' - \lambda y - y' - \lambda z - z', \\ & & \quad\quad \lambda x + x' - 2\lambda y - 2y' + \lambda z + z') \\ & = & (\lambda x + \lambda y + \lambda z + x' + y' + z', \\ & & \quad \lambda x - \lambda y - \lambda z + x' - y' - z', \\ & & \quad\quad \lambda x - 2\lambda y + \lambda z + x' - 2y' + z' \\ & = & (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y - \lambda z, \lambda x - 2\lambda y + \lambda z) + \\ & & \quad \underbrace{(x'+y'+z', x'-y'-z', x'-2y'+z')}_{=f(v)} \\ & = & \lambda \underbrace{(x+y+z, x-y-z, x-2y+z)}_{=f(u)} + f(v) \\ & = & \lambda f(u) + f(v) \end{array}$$

Par conséquent $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire, et c'est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & (1+0+0, 1-0-0, 1-2\times 0+0) \\ & = & (1,1,1) \\ f(e_2) & = & (0+1+0, 0-1-0, 0-2\times 1+0) \\ & = & (1,-1,-2) \\ f(e_3) & = & (0+0+1, 0-0-1, 0-2\times 0+1) \\ & = & (1,-1,1) \end{array}$$

et par suite, la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3). On recherche le rang de la matrice A par un échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}(A) = 3$, et par suite que $\mathrm{rg}(f) = 3$ puisque par théorème le rang de f est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.
Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de rang 3. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, d'après le théorème de caractérisation des automorphismes, f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.