Exercice| [4915] | 1| Matrice d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ c+bx+ax^2 & \longmapsto & (-c+2b+a)+(b+a)x+(2c-2b+4a)x^2 \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

(3). Déterminer le rang de A. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans cette base.

(3). On obtiendra le rang de A par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de f. Le caractère bijectif de f proviendra de la comparaison du rang de f à la dimension de $\mathbb{R}_2[x]$.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}_2[x] \\ \text{est linéaire} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall P_1 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \forall P_2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right., f(\lambda P_1+P_2)=\lambda f(P_1)+f(P_2) \right)$$

Soient alors $\left\{ \begin{array}{ccc} P_1 : x \longmapsto c_1+b_1x+a_1x^2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ P_2 : x \longmapsto c_2+b_2x+a_2x^2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$.

On pose $P_3=\lambda P_1+P_2$ et en notant $P_3 : x \longmapsto c_3+b_3x+a_3x^2$ on a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} c_3 & = & \lambda c_1+c_2 \\ b_3 & = & \lambda b_1+b_2 \\ a_3 & = & \lambda a_1+a_2 \end{array} \right.$$

Montrons que $f(P_3)=\lambda f(P_1)+f(P_2)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(P_3) & = & (-c_3+2b_3+a_3)+(b_3+a_3)x+(2c_3-2b_3+4a_3)x^2 \\ & = & (-(\lambda c_1+c_2)+2(\lambda b_1+b_2)+\lambda a_1+a_2) \\ & & \quad +(\lambda b_1+b_2+\lambda a_1+a_2)x \\ & & \qquad +(2(\lambda c_1+c_2)-2(\lambda b_1+b_2)+4(\lambda a_1+a_2))x^2 \\ & = & (-\lambda c_1-c_2+2\lambda b_1+2b_2+\lambda a_1+a_2) \\ & & \quad +(\lambda b_1+\lambda a_1+b_2+a_2)x \\ & & \qquad +(2\lambda c_1+2c_2-2\lambda b_1-2b_2+4\lambda a_1+4a_2)x^2 \\ & = & (-\lambda c_1+2\lambda b_1+\lambda a_1-c_2+2b_2+a_2) \\ & & \quad +(\lambda b_1+\lambda a_1+b_2+a_2)x \\ & & \qquad +(2\lambda c_1-2\lambda b_1+4\lambda a_1+2c_2-2b_2+4a_2)x^2 \\ & = & (-\lambda c_1+2\lambda b_1+\lambda a_1)+(-c_2+2b_2+a_2) \\ & & \quad +(\lambda b_1+\lambda a_1)x+(b_2+a_2)x \\ & & \qquad +(2\lambda c_1-2\lambda b_1+4\lambda a_1)x^2+(2c_2-2b_2+4a_2)x^2 \\ & = & (-\lambda c_1+2\lambda b_1+\lambda a_1)+(\lambda b_1+\lambda a_1)x+(2\lambda c_1-2\lambda b_1+4\lambda a_1)x^2 \\ & & \quad +\underbrace{(-c_2+2b_2+a_2)+(b_2+a_2)x+(2c_2-2b_2+4a_2)x^2}_{=f(P_2)} \\ & = & \lambda\underbrace{(-c_1+2b_1+a_1)+(b_1+a_1)x+(2c_1-2b_1+4a_1)x^2}_{=f(P_1)}+f(P_2) \\ & = & \lambda f(P_1)+f(P_2) \end{array}$$

Par conséquent $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ est linéaire, et c'est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). En notant $\mathcal{B}=(P_0,P_1,P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ où $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto x$ et $P_2 : x \longmapsto x^2$ un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} f(P_0) & = & (-1+2\times 0+0)+(0+0)x+(2\times 1-2\times 0+4\times 0)x^2 \\ & = & -1+2x^2 \\ f(P_1) & = & (-0+2\times 1+0)+(1+0)x+(2\times 0-2\times 1+4\times 0)x^2 \\ & = & 2+x-2x^2 \\ f(P_2) & = & (-0+2\times 0+1)+(0+1)x+(2\times 0-2\times 0+4\times 1)x^2 \\ & = & 1+x+4x^2 \end{array}$$

et par suite, la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(3). On obtient le rang de la matrice A par un échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3-2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}(A)=3$, et par suite que $\mathrm{rg}(f)=3$ puisque par théorème le rang de f est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.
Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ de rang 3. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[x])=3$, d'après le théorème de caractérisation des automorphismes, f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.