Exercice| [4912] | 1| Application linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & 2AM - MA^2 \end{array} \right.$$

Montrer que f est une application linéaire.

Pistes de réflexion

— On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

Éléments de correction

Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ est une application} \\ \text{linéaire de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall (M_1, M_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ f(\lambda M_1 + M_2) = \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array} \right)$$

Soient $\left\{ \begin{array}{ccc} M_1 & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M_2 & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$ et posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.

Montrons que $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(M_3) & = & 2AM_3 - M_3A^2 \\ & = & 2A(\lambda M_1 + M_2) - (\lambda M_1 + M_2)A^2 \\ & = & 2\lambda AM_1 + 2AM_2 - \lambda M_1A^2 - M_2A^2 \\ & = & 2\lambda AM_1 - \lambda M_1A^2 + \underbrace{2AM_2 - M_2A^2}_{=f(M_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{\left(\lambda AM_1 - M_1A^2\right)}_{=f(M_1)} + f(M_2) \\ & = & \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.