Exercice| [4911] | 1| Application linéaire

On considère l'application $f$ donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x-y) \end{array} \right.$.

Montrer que $f$ est une application linéaire.

Pistes de réflexion

— On montrera le caractère linéaire de $f$ en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

Éléments de correction

Soient $\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ v & = & (x',y') \in \mathbb{R}^2 \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$, on pose $w = \lambda u + v$.

Montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.

En notant $w = (x", y")$, on a par construction $\left\{ \begin{array}{ccc} x" & = & \lambda x + x' \\ y" & = & \lambda y + y' \end{array} \right.$

Par définition de $f$, on a :

$$\begin{array}{ccl} f(w) & = & (x"+y", x"-y", 2x"-y") \\ & = & (\lambda x + x' + \lambda y + y', \lambda x + x' - (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') - (\lambda y + y')) \\ & = & (\lambda x + x' + \lambda y + y', \lambda x + x' - \lambda y - y', 2\lambda x + 2x' - \lambda y - y') \\ & = & (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, 2\lambda x - \lambda y) + \underbrace{(x'+y', x'-y', 2x'-y')}_{=f(v)} \\ & = & \lambda \underbrace{(x+y, x-y, 2x-y)}_{=f(u)} + f(v) \\ & = & \lambda f(u) + f(v) \end{array}$$

BY NC ND