Exercice| [4910] | 1| Application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+b, c-d) \end{array} \right.$.

Montrer que f est une application linéaire.

Pistes de réflexion

— On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

Éléments de correction

Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ est une application} \\ \text{linéaire de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall (M_1, M_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ f(\lambda M_1 + M_2) = \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array} \right)$$

Soient $\left\{ \begin{array}{rcl} M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$ et posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.

Montrons que $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.

En notant $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ on a par construction que : $\left\{ \begin{array}{rcl} a_3 & = & \lambda a_1 + a_2 \\ b_3 & = & \lambda b_1 + b_2 \\ c_3 & = & \lambda c_1 + c_2 \\ d_3 & = & \lambda d_1 + d_2 \end{array} \right.$

Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(M_3) & = & (a_3 + b_3, c_3 - d_3) \\ & = & (\lambda a_1 + a_2 + \lambda b_1 + b_2, \lambda c_1 + c_2 - (\lambda d_1 + d_2)) \\ & = & (\lambda a_1 + a_2 + \lambda b_1 + b_2, \lambda c_1 + c_2 - \lambda d_1 - d_2) \\ & = & (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda c_1 - \lambda d_1) + \underbrace{(a_2 + b_2, c_2 - d_2)}_{=f(M_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{(a_1 + b_1, c_1 - d_1)}_{=f(M_1)} + f(M_2) \\ & = & \lambda f(M_1), f(M_2) \end{array}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$.