Exercice| [4909] | 1| Application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P'(0), P(1)) \end{array} \right.$.

Montrer que f est une application linéaire.

Pistes de réflexion

— On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

Éléments de correction

Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ est une application} \\ \text{linéaire de } \mathbb{R}_2[x] \text{ dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{array} \right)$$

Soient $\left\{ \begin{array}{ccc} P_1 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ P_2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$ et posons $P_3 = \lambda P_1 + P_2$.

Montrons que $f(P_3) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

Il est clair que $P_3' = \lambda P_1' + P_2'$.

Par définition de f, on a alors :

$$\begin{array}{rcl} f(P_3) & = & \left(P_3'(0), P_3(1)\right) \\ & = & \left(\left(\lambda P_1' + P_2'\right)(0), (\lambda P_1 + P_2)(1)\right) \\ & = & \left(\lambda P_1'(0) + P_2'(0), \lambda P_1(1) + P_2(1)\right) \\ & = & \left(\lambda P_1'(0), \lambda P_1(1)\right) + + \underbrace{\left(P_2'(0), P_2(1)\right)}_{=f(P_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{\left(P_1'(0), P_1(1)\right)}_{=f(P_1)} + f(P_2) \\ & = & \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{array}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}^2$.