Exercice| [4908] | 1| Endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$

On désigne par $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et on considère l'application u définie par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & P + (1-x)P' + 2P'' \end{array} \right.$$

(1). Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = \{u(1), u(x), u(x^2)\}$. En déduire une base de $\operatorname{Im}(u)$ et le rang de u.

(3). Calculer l'image par u de $x \longmapsto 1 - x$.

(4). Déduire des questions précedentes une base du noyau de u.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de u en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images. puis ne pas oublier que cela doit-être un endomorphisme... puisqu'il faudra discuter sur le degré de $u(P)$ permettra de montrer que $u(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

(2). On calculera les images des vecteurs de la base canonique pour former la matrice de la famille de vecteurs à étudier. On recherchera alors des relations de dépendance entre les vecteurs de la famille pour exhiber ensuite une base de $\operatorname{Im}(u)$.

(3). Un calcul direct donne que $x \longmapsto 1 - x$ est le polynôme nul, donc qu'il appartient au noyau de u.

(4). Le théorème du rang donne la dimension du noyau, qui est alors une droite vectorielle dont on connaît déjà un élément.

Éléments de correction

(1). Caractère linéaire de f : $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}[x]$ sont deux espaces vectoriels.

Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} u \text{ est une application} \\ \text{linéaire de } \mathbb{R}_2[x] \text{ dans } \mathbb{R}[x] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ u(\lambda P_1 + P_2) = \lambda u(P_1) + u(P_2) \end{array} \right)$$

Soient $\left\{ \begin{array}{ccc} P_1 & = & \mathbb{R}_2[x] \\ P_2 & = & \mathbb{R}_2[x] \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$, on pose $P_3 = \lambda P_1 + P_2$.

Montrons que $u(P_3) = \lambda u(P_1) + u(P_2)$.

Par définition de u :

$$\begin{array}{rcl} u(P_3) & = & P_3 + (1-x)P_3' + 2P_3'' \\ & = & \lambda P_1 + P_2 + (1-x)(\lambda P_1 + P_2)' + 2(\lambda P_1 + P_2)'' \\ & = & \lambda P_1 + P_2 + (1-x)(\lambda P_1' + P_2') + 2(\lambda P_1'' + P_2'') \\ & = & \lambda P_1 + P_2 + \lambda(1-x)P_1' + (1-x)P_2' + 2\lambda P_1'' + 2P_2'' \\ & = & \lambda P_1 + \lambda(1-x)P_1' + 2\lambda P_1'' + \underbrace{P_2 + (1-x)P_2' + 2P_2''}_{=u(P_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{\left(P_1 + (1-x)P_1' + 2P_1''\right)}_{=u(P_1)} + u(P_2) \\ & = & \lambda u(P_1) + u(P_2) \end{array}$$

u est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$.

Caractère endomorphisme de u : il reste à montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $u(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Par opération sur les degrés des polynômes, il vient :

$$\underbrace{\underbrace{P}_{\deg \leq 2} + \underbrace{\underbrace{(1-x)}_{\deg = 1} \underbrace{P'}_{\deg \leq 1}}_{\deg \leq 2} + \underbrace{2P''}_{\deg \leq 0}}_{\deg \leq 2}$$

Par conséquent $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$.

(2). Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} u(\tilde{1}) & = & \tilde{1} + (1-x)\tilde{1}' + 2\tilde{1}'' \\ & = & \tilde{1} + (1-x)\tilde{0} + 2\tilde{0} \\ & = & \tilde{1} \\ u(x) & = & x + (1-x)(x)' + 2(x)'' \\ & = & x + (1-x)\tilde{1} + 2\tilde{0} \\ & = & x + 1 - x \\ & = & 1 \\ u(x^2) & = & x^2 + (1-x)(x^2)' + 2(x^2)'' \\ & = & x^2 + (1-x) \times 2x + 2 \times 2 \\ & = & x^2 + 2x - 2x^2 + 4 \\ & = & 4 + 2x - x^2 \end{array}$$

En notant A la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, on a par théorème que : $(\mathcal{F}$ est une famille libre de 3 vecteurs$) \Leftrightarrow (\operatorname{rg}(A) = 3)$.

On a ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ où clairement cette matrice est de rang 2 puisque les deux premières colonnes sont identiques et que la troisième n'est pas proportionnelle à la première.

Par suite, la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre.

Comme la famille $\{1, x, x^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, par théorème, la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$.

On a donc : $\begin{array}{rcl} \operatorname{Im}(u) & = & \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) \\ & = & \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_3)) \end{array}$

La famille $\{u(e_1), u(e_3)\}$ est une famille de deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\operatorname{Im}(u)$, donc par théorème, elle est libre.

La famille $\{u(e_1), u(e_3)\}$ est donc une famille libre et génératrice de $\operatorname{Im}(u)$, donc par définition elle en forme un base.

La dimension de $\operatorname{Im}(u)$ est égal au nombre de vecteurs d'une de ses bases, et par suite, $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension 2.

Comme par définition $\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$, on a donc $\operatorname{rg}(u) = 2$.

(3). La famille $\mathcal{B}'$ est une famille de polynômes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de degrés échelonnés. C'est donc par théorème, une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

C'est donc une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, elle est donc aussi une base de ce dernier.

(4). Un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} u(1-x) & = & 1 - x + (1-x) \times (-1) + 2 \times 0 \\ & = & 1 - x - (1-x) \\ & = & 0 \end{array}$

et ainsi $u(1-x) = \tilde{0}$ ce qui par définition donne que $x \longmapsto 1 - x \in \operatorname{Ker}(u)$.

(5). D'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right)}_{=3} = \dim\left(\operatorname{Ker}(u)\right) + \underbrace{\operatorname{rg}(u)}_{=1}$$

donc il vient : $\dim\left(\operatorname{Ker}(u)\right) = 1$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(u)$ est une droite vectorielle. Comme $x \longmapsto 1 - x \in \operatorname{Ker}(u)$, on en déduit que ce dernier vecteur engendre $\operatorname{Ker}(u)$, c'est à dire $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}\,(x \longmapsto 1 - x)$.