Exercice| [4907] | 1| Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
On considère l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \Phi(x) = x - (x_1 + x_2 + x_3)\, v \end{array} \right.$$

(1). Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Calculer $\Phi(v)$. Qu'en déduire pour Φ ?

(3). On suppose dans cette question que $v = (1, 1, -1)$.

(a). Déterminer une base du noyau de Φ, et déterminer alors le rang de Φ.

(b). Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c). En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(\Phi)$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de Φ en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). On pensera à exploiter le fait que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.

(3). (a). On traduira l'appartenance d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$ au noyau sous forme d'un système d'équations qui permettra d'obtenir une base du noyau de Φ. Le rang de Φ s'obtiendra par le théorème du rang.

(b). La famille $\mathcal{F}$ est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension $2\ldots$

(c). On exploitera une relation de dépendance évidente dans les vecteurs de $\mathcal{F}$ pour donner une base de $\mathrm{Im}\,(\Phi)$.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} \Phi \text{ est une application} \\ \text{linéaire de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ \Phi(\lambda x + y) = \lambda \Phi(x) + \Phi(y) \end{array} \right)$$

Soient $\left\{ \begin{array}{rcl} x = (x_1, x_2, x_3) & \in & \mathbb{R}^3 \\ y = (y_1, y_2, y_3) & \in & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$ et posons $z = \lambda x + y$.

En notant $z = (z_1, z_2, z_3)$ on a par construction que : $\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ z_2 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \end{array} \right.$

Montrons que $\Phi(z) = \lambda \Phi(x) + \Phi(y)$.

Par définition de Φ, on a :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(z) & = & z - (z_1 + z_2 + z_3)\, v \\ & = & \lambda x + y - (\lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2 + \lambda x_3 + y_3)\, v \\ & = & \lambda x + y - (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + y_1 + y_2 + y_3)\, v \\ & = & \lambda x + y - (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3)\, v - (y_1 + y_2 + y_3)\, v \\ & = & \lambda x - \lambda (x_1 + x_2 + x_3)\, v + \underbrace{y - (y_1 + y_2 + y_3)\, v}_{=\Phi(y)} \\ & = & \lambda \underbrace{(x - (x_1 + x_2 + x_3)\, v)}_{=\Phi(x)} + \Phi(y) \\ & = & \lambda \Phi(x) + \Phi(y) \end{array}$$

Ainsi, Φ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

(2). Un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} \Phi(v) & = & v - \underbrace{(v_1 + v_2 + v_3)}_{=1} v \\ & = & v - v \\ & = & \overrightarrow{0} \end{array}$

et par suite $\Phi(v) = \overrightarrow{0}$ ce qui par définition donne que $v \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$.

(3). (a). Par définition : $\quad (x \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\Phi(x) = \overrightarrow{0}\right)$.

Ainsi, on a :

$$\begin{array}{rl} & (x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)) \\ \Leftrightarrow & \left(\Phi(x) = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(x - (x_1 + x_2 + x_3)\, v = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left((x_1, x_2, x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)(1, 1, -1) = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left((x_1, x_2, x_3) - (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, -(x_1 + x_2 + x_3)) = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left((x_1, x_2, x_3) - (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - x_3) = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left((x_1 - (x_1 + x_2 + x_3), x_2 - (x_1 + x_2 + x_3), x_3 - (-x_1 - x_2 - x_3)) = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left((-x_2 - x_3, -x_1 - x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} -x_2 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 \quad - x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array}$$

On procè de alors à un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -1L_1 \\ L_2 \leftarrow -1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant x_1, ..., x_3 les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \end{array}\right.$$

Par suite, il vient :

$$\begin{array}{rcl} (X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & (X \in \mathrm{Vect}\,((-1, -1, 1))) \end{array}$$

Ainsi, on a : $\mathrm{Ker}\,(\Phi) = \mathrm{Vect}\,((-1, -1, 1))$.
Il est clair alors que $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$ est une droite vectorielle, donc $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(\Phi)) = 1$.
Par ailleurs, d'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim\left(\mathbb{R}^3\right)}_{=3} = \underbrace{\dim\,(\mathrm{Ker}\,(\Phi))}_{=1} + \mathrm{rg}\,(-\Phi)$$

donc $\mathrm{rg}\,(\Phi) = 2$.

(b). Un calcul direct donne que : $$\begin{array}{rcl} \Phi\,(e_1) & = & (1,0,0) - (1+0+0)\,(1,1,-1) \\ & = & (1,0,0) - (1,1,-1) \\ & = & (0,-1,1) \end{array}$$

De même : $$\begin{array}{rcl} \Phi\,(e_2) & = & (0,1,0) - (0+1+0)\,(1,1,-1) \\ & = & (0,1,0) - (1,1,-1) \\ & = & (-1,0,1) \end{array}$$

et pour terminer : $$\begin{array}{rcl} \Phi\,(e_3) & = & (0,0,1) - (0+0+1)\,(1,1,-1) \\ & = & (0,0,1) - (1,1,-1) \\ & = & (-1,-1,2) \end{array}$$

Par définition, $\dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rg}\,(f)$, donc $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension 2.
La famille $\mathcal{F}$ est donc une famille de 3 vecteurs de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui est de dimension 2. Donc par théorème, la famille $\mathcal{F}$ ne peut pas être libre.

(c). On remarque tout d'abord que $\Phi\,(e_3) = \Phi\,(e_1) + \Phi\,(e_2)$.
Par ailleurs, par théorème, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(\Phi)$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\,(\Phi) & = & \mathrm{Vect}\,(\Phi\,(e_1), \Phi\,(e_2), \Phi\,(e_3)) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(\Phi\,(e_1), \Phi\,(e_2)) \end{array}$$

Par suite, la famille $\{\Phi\,(e_1), \Phi\,(e_2)\}$ est une famille génératrice de 2 vecteurs non nuls de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui est un espace de dimension 2, donc par théorème, la famille $\{\Phi\,(e_1), \Phi\,(e_2)\}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.