Exercice| [4906] | 1| Propriétés opératoires de $\exp$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir les égalités suivantes :

(1). $\dfrac{2+3\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = 2\mathrm{e}^{-2x}+3\mathrm{e}^{-x}+2$

(2). $(\mathrm{e}^{x}+1)^2-(\mathrm{e}^{x}-1)^2 = 4\mathrm{e}^{x}$

(3). $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}+2}{\mathrm{e}^{3x}+1} = \dfrac{1+2\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$

(4). $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}$

Pistes de réflexion

— On mobilisera au mieux les propriétés opératoires de la fonction $\exp$.

Éléments de correction

(1). On a directement que :

$$\begin{aligned}
\frac{2+3\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} &= \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}}+\frac{3\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}}+\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} \\
&= 2\times\frac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}+3\times\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}}+2\times\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} \\
&= 2\mathrm{e}^{2x}+3\times\mathrm{e}^{x-2x}+2\times\mathrm{e}^{2x-2x} \\
&= 2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{0} \\
&= 2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^{-x}+2
\end{aligned}$$

(2). On a directement en remarquant qu'il s'agit d'une identité remarquable :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{x}+1)^2-(\mathrm{e}^{x}-1)^2 &= ((\mathrm{e}^{x}+1)-(\mathrm{e}^{x}-1))\,((\mathrm{e}^{x}+1)+(\mathrm{e}^{x}-1)) \\
&= (\mathrm{e}^{x}+1-\mathrm{e}^{x}+1)\,(\mathrm{e}^{x}+1+\mathrm{e}^{x}-1) \\
&= 2\times 2\mathrm{e}^{x} \\
&= 4\mathrm{e}^{x}
\end{aligned}$$

(3). On a directement en factorisant au numérateur et au dénominateur par e^{3x} :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{3x}+2}{\mathrm{e}^{3x}+1} &= \frac{\mathrm{e}^{3x}\left(1+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3x}}\right)}{\mathrm{e}^{3x}\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}\right)} \\
&= \frac{1+2\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}}{1-\mathrm{e}^{-3x}} \\
&= \frac{1+2\mathrm{e}-3x}{1+\mathrm{e}^{-3x}}
\end{aligned}$$

(4). On a directement en factorisation au numérateur et au dénominateur par e^{2x} :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x}} &= \frac{\mathrm{e}^{x+2x}-\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x+2x}+\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{x}-1)}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{x}+1)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{x}+1)}{(\mathrm{e}^{x}+1)(\mathrm{e}^{1}+1)} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{x})^2-1^2}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\times x}-1}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}
\end{aligned}$$