Exercice| [4901] | 1| Expression algébrique et quantitée conjuguée

Montrer les égalités suivantes :

(1). $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}$.

(2). $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}$

(3). $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x-\sqrt{9x^2+1} = -\dfrac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$

Pistes de réflexion

(1). On fera intervenir la quantité conjuguée de $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$ en remarquant que $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1} = \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)\times\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}$ et on mobilisera ensuite l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(2). On fera intervenir la quantité conjuguée de $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}$ en remarquant que $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1} = \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}\right)\times\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}$ et on mobilisera ensuite l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(3). On fera intervenir la quantité conjuguée de $3x-\sqrt{9x^2+1}$ en remarquant que $3x-\sqrt{9x^2+1} = \left(3x-\sqrt{9x^2+1}\right)\times\dfrac{3x+\sqrt{9x^2+1}}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$ et on mobilisera ensuite l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1} &= \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{1}\times\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}\\
&= \frac{x^2+2-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}\\
&= \frac{x^2+2-x^2-1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

(2). Un calcul direct donne que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}}{1}\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}\\
&= \frac{x^2+x+1-(x^2+x-1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}\\
&= \frac{x^2+x+1-x^2-x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}
\end{aligned}$$

(3). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ 3x-\sqrt{9x^2+1} &= \frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{1}\times\frac{3x+\sqrt{9x^2+1}}{3x+\sqrt{9x^2+1}}\\
&= \frac{\left(3x-\sqrt{9x^2+1}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)}{3x+\sqrt{9x^2+1}}\\
&= \frac{(3x)^2-\left(\sqrt{9x^2+1}\right)^2}{3x+\sqrt{9x^2+1}}\\
&= \frac{9x^2-(9x^2+1)}{3x+\sqrt{9x^2+1}}\\
&= \frac{9x^2-9x^2-1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}\\
&= \frac{-1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}
\end{aligned}$$