Exercice| [4891] | 1| Somme d'une série numérique

On se propose dans cette série de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \frac{n^2-2n+2}{n!}$.

(1). Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-2n+2 = an(n-1)+bn+c$.

(2). Déterminer une expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{n^2-2n+2}{n!}$.

(3). En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{n^2-2n+2}{n!}$.

Pistes de réflexion

(1). On procèdera par identification des coefficients des deux expressions polynômiales qui sont en jeu ici.

(2). On utilisera l'écriture du dénominateur obtenue à la question précédente pour faire apparaître la somme partielle de la série exponentielle à l'aide de changements d'indices, pour obtenir par passage à la limite, la limite de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Éléments de correction

(1). Il est immédiat que :

$$\begin{aligned} \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ an(n-1)+bn+c &= an^2-an+bn+c \\ &= an^2+(b-a)n+c \end{aligned}$$

et ainsi, par identification des coefficients avec l'expression polynômiale n^2-2n+2, le triplet (a,b,c) cherché est donc solution du système de conditions $\begin{cases} a & =1 \\ -a+b & =-2 \\ c=2 \end{cases}$ qui permet d'obtenir directement de L_1 et L_3 que $a=1$ et $c=2$ et enfin par L_2 que $b=-1$. On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-2n+2 = n(n-1)-n+2$.

(2). Il vient donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2-2k+2}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)-k+2}{k!} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}}_{\text{les deux premiers termes sont nuls}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}}_{\text{le premier terme est nul}} \\ &\quad +2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque : $k! = k(k-1)\times(k-2)!$ si $k \geq 2$ et $k! = k \times (k-1)!$ si $k \geq 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2-2k+2}{k!} &= \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!}}_{\substack{\text{Changement d'indice} \\ j=k-2}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}}_{\substack{\text{Changement d'indice} \\ i=k-1}} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Or on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ et convergente avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

Donc en particulier pour $x=1$, on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$ c'est à dire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} \\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} \\ \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\mathrm{e}-\mathrm{e}+2\mathrm{e}}_{=2\mathrm{e}}$.

Par conséquent la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est convergente, donc par définition, la série $\sum u_n$ est convergente, et a pour somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2\mathrm{e}$.