## Exercice| [4890] | 1| Somme d'une série numérique

On se propose dans cette série de déterminer la somme $S$ de la série numérique $\sum \frac{n^2-2n+2}{2^n}$.

**(1).** Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-2n+2 = an(n-1)+bn+c$.

**(2).** Déterminer une expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{n^2-2n+2}{2^n}$.

**(3).** En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{n^2-2n+2}{2^n}$.

## Pistes de réflexion

**(1).** On procèdera par identification des coefficients des deux expressions polynômiales qui sont en jeu ici.

**(2).** On utilisera l'écriture du dénominateur obtenue à la question précédente pour faire apparaître les sommes partielles des séries géométriques dérivées pour obtenir par passage à la limite, la limite de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

## Éléments de correction

**(1).** Il est immédiat que :

$$\begin{aligned} \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ an(n-1)+bn+c &= an^2-an+bn+c \\ &= an^2+(b-a)n+c \end{aligned}$$

et ainsi, par identification des coefficients avec l'expression polynômiale $n^2-2n+2$, le triplet $(a,b,c)$ cherché est donc solution du système de conditions $\begin{cases} a \quad\ \ = 1 \\ -a+b = -2 \\ \quad\ \ c = 2 \end{cases}$ qui permet d'obtenir directement de $L_1$ et $L_3$ que $a=1$ et $c=2$ et enfin par $L_2$ que $b=-1$.
On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-2n+2 = n(n-1)-n+2$.

**(2).** Il vient donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2-2k+2}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)-k+2}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &\quad +2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Or on sait que, puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}_{=2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}}_{=4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}}_{=16}$$

Ainsi, on en déduit que $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\frac{1}{4}\times 16 - \frac{1}{2}\times 4 + 2\times 2}_{=6}$.

Par conséquent la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est convergente, donc par définition, la série $\sum u_n$ est convergente, et a pour somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 6$.