Exercice| [4889] | 1| Sous-espace de $\mathbb{R}^3$

On considère $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, -2, 1)$ et $v_3 = (2, 0, 3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On considère le sous-ensemble H de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ x = \lambda_1 (v_2 - v_1) + \lambda_2 (v_3 - v_1)\right\}$$

(1). Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2). Donner une famille génératrice de H.

(3). Qu'en déduire pour H ?

Pistes de réflexion

(1). On commencera par vérifier que H est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, et pour la stabilité par combinaison linéaire, on vérifiera que l'élement fabriqué par combinaison linéaire satisfait à la relation permettant de définir les éléments de H.

(2). La famille génératrice de H est implicite dans la définition de H.

(3). Disposant d'une famille génératrice, il nous suffira d'étudier sa liberté.

Éléments de correction

(1). **H est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:** par construction de H.
Le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ appartient à H : en effet, on a clairement que $\underbrace{0}_{=\lambda_1} (v_2 - v_1) + \underbrace{0}_{=\lambda_2} (v_3 - v_1) = (0)$ ce qui assure que $\overrightarrow{0} \in H$.

Stabilité par combinaison linéaire : Soient $\begin{cases} x & \in & H \\ y & \in & H \\ \beta & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

On pose $z = \beta x + y$, et montrons que $z \in H$, c'est à dire qu'il existe $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que $z = \eta_1 (v_2 - v_1) + \eta_2 (v_3 - v_1)$.
Puisque $x \in H$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \lambda_1 (v_2 - v_1) + \lambda_2 (v_3 - v_1)$.
De même, puisque $y \in H$, il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = \mu_1 (v_2 - v_1) + \mu_2 (v_3 - v_1)$.
Ainsi, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} z & = & \beta x + y \\ & = & \beta (\lambda_1 (v_2 - v_1) + \lambda_2 (v_3 - v_1)) + \mu_1 (v_2 - v_1) + \mu_2 (v_3 - v_1) \\ & = & \beta\lambda_1 (v_2 - v_1) + \beta\lambda_2 (v_3 - v_3) + \mu_1 (v_2 - v_1) + \mu_2 (v_3 - v_1) \\ & = & \underbrace{(\beta\lambda_1 + \mu_1)}_{=\eta_1} (v_2 - v_1) + \underbrace{(\beta\lambda_2 + \mu_2)}_{=\eta_2} (v_3 - v_1) \\ & = & \eta_1 (v_2 - v_1) + \eta_2 (v_3 - v_1) \end{array}$$

et donc $z \in H$.

(2). Par définition de H, ce dernier est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_2 - v_1$ et $v_3 - v_1$, ce qui signifie que $H = \mathrm{Vect}\,(v_2 - v_1, v_3 - v_1)$.

(3). La famille $\mathcal{B} = (v_2 - v_1, v_3 - v_1)$ est une famille de deux vecteurs non nuls et non colinéaires. Par théorème, elle est donc libre.
Ainsi, la famille $\mathcal{B} = (v_2 - v_1, v_3 - v_1)$ est une famille libre et génératrice de H, donc par définition, elle en forme une base.

Comme la famille $\mathcal{B} = (v_2 - v_1, v_3 - v_1)$ est une base de H, le nombre de vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ est égal à la dimension de H, ce qui amène à $\dim(H) = 2$.