Exercice| [4864] | 1| Étude d'une famille de séries numériques | BCE 2021 Filière BL

Dans tout l'exercice, a désigne un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

La première question établit la convergence de la suite $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite, notée $S(a)$ et les deux questions qui suivent, mettent en place, respectivement dans les cas $a=1$ et $a=2$, des accélérations de convergence.

(1). (a). Pour tout entier naturel k, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{ka}\,\mathrm{d}t$.

(b). En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :

$$S_n(a) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$$

(c). Montrer que la suite $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite $S(a)$ vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$.

(d). Établir pour tout entier naturel n et $t\in\mathbb{R}_+^*$, l'égalité suivante :

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} + \frac{(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^a)}$$

(2). On suppose dans toute cette question que $a=1$.

(a). Donner la valeur de $S(1)$.

(b). Établir l'inégalité suivante : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ |S(1)-S_n(1)| \leq \dfrac{1}{n+2}$.

(c). (i). Montrer que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$.

(ii). En déduire que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \left|S(1) - \displaystyle\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}(n+2)}$

puis que : $\quad S(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}$.

(3). On suppose dans toute cette question que $a=2$.

(a). On pose, pour tout entier naturel n : $\quad J_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$.

(i). À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J_{n+1}-J_n$ en fonction de J_{n+1}.

(ii). En déduire que $J_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} J_n$.

(iii). Calculer J_n en fonction de n.

(b). Rappeler l'expression dela dérivée de la fonction $t\longmapsto \arctan(t)$ et en déduire la valeur de $S(2)$.

(c). Montrer que : $\quad \left|S(2) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et que $S(2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

Pistes de réflexion

(1). (a). Par de problème particulier pour primitiver la fonction $t\longmapsto t^{ka}$.

(b). On se rappelera que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \ldots$ et on utilisera ensuite la linéarité de l'intégrale.

(c). On utilisera la croissance de l'intégrale pour montrer que $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en majorant $t\longmapsto \dfrac{1}{1+t^a}$ sur $[0;1]$.

(d). On remarquera que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-t^a}{2}\right)^k$.

(2). (a). On sait que $S(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ d'après la question précédente.

(b). D'après ce qui précède $S_n(1)-S(1) = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale pour obtenir la majoration demandée.

(c). (i). C'est encore une conséquence de la croissance de l'inégrale.

(ii). De la question **(1)(d)** on remarque que $S(1) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{2^{k+1}}\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t$ et il suffit de majorer la différence de $\left|S(1) - \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{2^{k+1}}\right)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t\right|$.
La valeur de $S(1)$ se déduit de cet encadrement par passage à la limite avec le théorème d'encadrement.

(3). (a). (i). À l'aide d'une factorisation on montre que $J_{n+1}-J_n = \displaystyle\int_0^1 t\times t\left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$ et on effectue l'intégration par parties proposée en choisissant de primitiver la fonction $t\longmapsto t\left(1-t^2\right)^n$ de sorte à pouvoir faire apparaître J_{n+1}.

(ii). Il suffit d'isoler J_{n+1} en fonction de J_n dans la relation trouvée précédemment.

(iii). En écrivant que $J_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}\times\dfrac{2n}{2n+1}\times\dfrac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times J_0$ et en remarquant que $\dfrac{2n+2}{2n+3} = \dfrac{2n+2}{2n+3}\times\dfrac{2n+2}{2n+2}$ et ainsi de suite, on pourra exprimer le dénominateur de J_{n+1} comme une factorielle, et le numérateur comme le produit de deux factorielles.

(b). On sait que $S(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et que la dérivée de $t\longmapsto \arctan(t)$ est $t\longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

(c). On s'inspire de la question **(2)(c)(i)** pour utiliser l'expression de J_n et d'obtenir la majoration demandée, puis l'autre expression de $S(2)$ par le théorème d'encadrement.

Éléments de correction

(1). (a). Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{ka}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{ka+1}t^{ka+1}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{ka+1}\times 1^{ka+1} - \frac{1}{ka+1}\times 0^{ka+1}\\ &= \frac{1}{ka+1}\end{aligned}$$

(b). D'après ce qu'il précède, il vient que :
$$\begin{aligned}S_n(a) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{ka+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\int_0^1 t^{ka}\,\mathrm{d}t\right)\\ &\underset{\substack{\text{linéarité de}\\ \text{l'intégrale}}}{=} \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ka}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ka}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1-(-t^a)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t - (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+2}\int_0^1\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t\\ &\underset{(-1)^n=(-1)^{n+2}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n}\int_0^1\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(c). On a que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$

Il est immédiat que : $\forall t\in[0;1]\,,\ \left|\frac{1}{1+t^a}\right|\leq 1$

Donc on a que : $\forall t\in[0;1]\,,\ 0\leq\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\leq t^{na+a}$

Les fonctions $t\longmapsto\frac{t^{na+a}}{1+t^a}$ et $t\longmapsto t^{na+a}$ étant continues sur $[0;1]$, par croissance de l'intégrale, on a donc : $0\leq\int_0^1\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t\leq\underbrace{\int_0^1 t^{na+a}\,\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{na+a+1}}$

Ainsi, il vient que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{na+a+1}$

Or, on a $\frac{1}{na+a+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc il vient que $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{na+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ ce qui donne que $S_n(a)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1\frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$.

(d). Soit $n\in\mathbb{N}$. Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-t^a}{2}\right)^k\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1-t^a}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1-t^a}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2^{n+1}-(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2-(1-t^a)}{2}}\\ &= \frac{2^{n+1}-(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^a)}\\ &= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^a)}-\frac{(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}(1t^a)}\\ &= \frac{1}{1+t^a}-\frac{(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^a)}\end{aligned}$$
ce qui est bien la relation attendue.

(2). (a). D'après ce qui précède, on a :
$$\begin{aligned}S_n(1) &= \int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &\underset{\forall t\in[0;1],\ 1+t>0}{=} [\ln(1+t)]_0^1\\ &= \ln(1+1)-\ln(1+0)\\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

(b). D'après ce qui précède, on a :
$$\begin{aligned}|S(1)-S_n(1)| &= \left|\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t-\left(\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right)\right|\\ &= \int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &\leq \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+2}\right]_0^1\\ &= \frac{1^{n+2}}{n+2}-\frac{0^{n+2}}{n+2}\\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

(c). (i). Sur le même principe que précédemment, on a : $\forall t\in[0;1]\,,\ 0\leq\frac{1}{(1+t)}\leq 1.$

Ainsi, il vient que : $\forall t\in[0;1]\,,\ 0\leq\frac{(1-t)^{n+1}}{(1+t)}\leq(1-t)^{n+1}$

Les fonctions $t\longmapsto\frac{(1-t)^{n+1}}{(1+t)}$ et $t\longmapsto(1+t)^{n+1}$ étant continues et positives sur $[0;1]$, par croissance de l'intégrale, il vient que :

$$\begin{aligned}0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(1+t)}\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1\\ &= -\frac{1-1)^{n+2}}{n+2}+\frac{(1-0)^{n+2}}{n+2}\\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)} \leq \frac{1}{2^{n+1}(n+2)}$

(ii). D'après la question **(1)(d)**, il vient que :

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{S(1)} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{2^{k+1}}\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{2^{k+1}}\right)\mathrm{d}t &\underset{\substack{\text{linéarité}\\ \text{de l'intégrale}}}{=} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\int_0^1 (1-t)^k\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\left(-\frac{(1-1)^{k+1}}{k+1}+\frac{(1-0)^{k+1}}{k+1}\right)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \left|S(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right| &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}\end{aligned}$$

Par suite, comme $\displaystyle\frac{1}{(n+2)2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en conclut par le théorème d'encadrement que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \underset{n\to+infty}{\longrightarrow} S(1)$, c'est à dire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = S(1)$

(3). (a). (i). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}J_{n+1}-J_n &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \left(\left(1-t^2\right)^{n+1}-\left(1-t^2\right)^n\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n\left(1-t^2-1\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t\times t\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On effectue l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}u(t) &= t & &\underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) &= 1\\ v(t) &= -\frac{1}{2(n+1)}\left(1-t^2\right)^{n+1} & &\underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) &= t\left(1-t^2\right)^n\end{aligned}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}J_{n+1}-J_n &= \left[-\frac{t}{2(n+1)}\left(1-t^2\right)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2(n+1)}\left(1-t^2\right)^{n+1}\mathrm{d}t\\ &= \left(-\frac{1}{2(n+1)}\left(1-1^2\right)^{n+1}+\frac{0}{2(n+1)}\left(1-0^2\right)^{n+1}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2(n+1)}\int_0^1\left(1-t^2\right)^{n+1}\mathrm{d}t\\ &= 0+\frac{1}{2(n+1)}J_{n+1}\\ &= \frac{1}{2(n+1)}J_{n+1}\end{aligned}$$

(ii). De la question précédente, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1}-\dfrac{1}{2(n+1)}J_{n+1} = J_n$

c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{2(n+1)-1}{2(n+1)}J_{n+1} = J_n$

ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{2n+3}{2n+2}J_{n+1} = J_n$

et finalement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}J_n$

(iii). De la question précédente, on obtient que :

$$\begin{aligned}J_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{2}{3}J_0\\ &= \frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{2n+2}{2n+2}\times\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n}{2n}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\frac{2n-2}{2n-2}\times\ldots\times\frac{2}{3}\times J_0\\ &= \frac{(2n+2)\times 2n\times(2n-2)\times\ldots 2\times(2n+2)\times 2n\times(2n-2)\times\ldots\times 2}{(2n+3)!}J_0\\ &= \frac{\left((2n+2)\times 2n\times(2n-2)\times\ldots\times 2\right)^2}{(2n+3)!}J_0\\ &= \frac{\left(2(n+1)\times 2\times n\times 2\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1\right)^2}{(2n+3)!}J_0\\ &= \frac{\left(2^{n+1}n(n+1)!)\right)^2}{(2n+3)!}J_0\\ &= \frac{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!}J_0\end{aligned}$$

et comme trivialement $J_0 = 1$, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(b). La dérivée de la fonction $t \longmapsto \arctan(t)$ est la fonction $f \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ ce qui donne que :

$$\begin{array}{rcl} S(2) & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ & = & [\arctan(t)]_0^1 \\ & = & \arctan(1) - \arctan(0) \\ & = & \dfrac{\pi}{4} - 0 \\ & = & \dfrac{\pi}{4} \end{array}$$

(c). D'après la question **(1)(d)**, on a :

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^2)^k}{2^{k+1}} + \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}$$

et par suite :

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{=S(2)} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^2)^k}{2^{k+1}}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^2)^k}{2^{k+1}}\,\mathrm{d}t & \underset{\substack{\text{Linéarité} \\ \text{de l'intégrale}}}{=} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{k+1}} \int_0^1 (1-t^2)^k\,\mathrm{d}t \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{k+1}} J_k \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k-k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} \end{array}$$

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \left| S(2) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} \right| = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

Sur le même principe que les questions précédentes en utilisant la croissance de l'intégrale, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Finalement, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \left| S(2) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Comme $\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par le théorème d'encadrement que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S(2)$ c'est à dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} = S(2)$.