Exercice| [4858] | 1| Avec des fonctions trigonométriques

Calcul l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ avec le changement de variable $x = \tan(t)$.

Pistes de réflexion

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

Éléments de correction

On effectue le changement de variables $x = \sin(t)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des relations :

$x = \tan(t)$ et $\mathrm{d}x = \left(1+\tan^2(t)\right)\,\mathrm{d}t$	Pour $x = 0$, on a $t = 0$ Pour $x = 1$, on a $t = \frac{\pi}{4}$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^2}\left(1+\tan^2(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{1+\tan^2(t)=\frac{1}{\cos^2(t)}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2t)}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t}{2} - \frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$