Exercice| [4857] | 1| Avec des fonctions trigonométriques

Calcul l'intégrale $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec le changement de variable en posant $x = \sin(t)$.

Pistes de réflexion

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

Éléments de correction

On effectue le changement de variables $x = \sin(t)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'intégrale $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des relations :

$x = \sin(t)$ et $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$	Pour $x = 0$, on a $t = 0$ Pour $x = 1$, on a $t = \frac{\pi}{2}$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2\sqrt{1-(\sin(t))^2}\times\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,(\sin(t))^2\sqrt{(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,(\sin(t))^2\,|\cos(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\underset{\substack{\cos(t)\geq 0 \\ \textbf{sur } \left[0;\frac{\pi}{2}\right]}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,(\sin(t))^2\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)\sin(t))^2\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\sin(2t))^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(4t)}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(4t)}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4}-0\right) \\
&= \frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$