Exercice| [4856] | 1| Exploiter une relation trigonométrique

On admet que : $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Calculer alors l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\, dx$ à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$.

Pistes de réflexion

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels dt et dx.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

Éléments de correction

On effectue le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\, dx$ à l'aide des relations :

$$t = \frac{1}{x} \text{ ou encore } \frac{1}{t} = x \quad \text{et} \quad dt = -\frac{1}{x^2}\, dx \text{ ou encore } -\frac{1}{t^2}\, dt = dx$$

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on a $t = 2$

Pour $x = 2$, on a $t = \dfrac{1}{2}$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\, dx &= \int_{2}^{\frac{1}{2}} (1 + t^2) \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{1 + t^2}{t^2} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(t)\right) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \arctan(t)\right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt - \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \arctan(t)\, dt \end{aligned}$$

On en déduit donc que : $$\begin{aligned} 2\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \arctan(t)\, dt &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \left[t - \frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} - 2\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

et donc il vient que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \arctan(t)\, dt = \frac{3\pi}{4}$.