Exercice| [4855] | 1| Changement de variables avec radicaux

(1). Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{1+x}$.

(2). Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = 1+\sqrt{x}$.

Pistes de réflexion

Pour les deux intégrales :
- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \dots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

Éléments de correction

(1). On effectue le changement de variables $t = \sqrt{x+1}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des relations :

$t = \sqrt{x+1}$ ou encore $t^2 - 1 = x$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ ou encore $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$	Pour $x = 0$, on a $t = 1$ Pour $x = 1$, on a $t = \sqrt{2}$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \times 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} 2\left(t^2-1\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= 2\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3} - \sqrt{2}\right) - 2\left(\frac{1^3}{3} - 1\right) \\
&= 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\right) - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\
&= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{4}{3} \\
&= \frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

(2). On effectue le changement de variables $t = 1+\sqrt{x}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'intégrale $I = I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des relations :

$t = 1+\sqrt{x}$ ou encore $(t-1)^2 = x$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ou encore $2(t-1)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$	Pour $x = 0$, on a $t = 1$ Pour $x = 1$, on a $t = 2$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t} \times 2(t-1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 2\frac{(t-1)^3}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_1^2 \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_1^2 \left(t^2 - 3t + 3 - \frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 3t - \ln(t)\right]_1^2 \\
&= 2\left(\left(\frac{2^3}{3} - \frac{3\times 2^2}{2} + 3\times 2 - \ln(2)\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3\times 1^2}{2} + 3\times 1 - \ln(1)\right)\right) \\
&= 2\left(\frac{8}{3} - 6 + 6 - \ln(2) - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3\right) \\
&= 2\left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right) \\
&= \frac{5}{3} - 2\ln(2)
\end{aligned}$$