Exercice| [4853] | 1| Effectuer un changement de variable

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2 \,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$.

Pistes de réflexion

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

Éléments de correction

On effectue le changement de variables $t = \ln(x)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2 \,\mathrm{d}x$ à l'aide des relations :

$t = \ln(x)$ ou encore $\mathrm{e}^{\,t} = x$	Pour $x = 1$, on a $t = \ln(1)$
et	Pour $x = 2$, on a $t = \ln(2)$
$\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ou encore $\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$	

On obtient donc : $\displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln(2)} t^2\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t$

On effectue alors l'intégration par parties suivante en posant :

$$\begin{array}{ccc} u(t) = t^2 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = 2t \\ v(t) = \mathrm{e}^{\,t} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = \mathrm{e}^{\,t} \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

On obtient alors : $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} t^2\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t = \left[t^2\mathrm{e}^{\,t}\right]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} 2t\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ccc} u(t) = 2t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = 2 \\ v(t) = \mathrm{e}^{\,t} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = \mathrm{e}^{\,t} \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\ln(2)]$.

On obtient ainsi : $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} t^2\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t = \left[t^2\mathrm{e}^{\,t}\right]_0^{\ln(2)} - \left(\left[2t\mathrm{e}^{\,t}\right]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} 2\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t\right)$

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(2)} t^2\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t &= \left[t^2\mathrm{e}^{\,t}\right]_0^{\ln(2)} - \left(\left[2t\mathrm{e}^{\,t}\right]_0^{\ln(2)} - \left[2\mathrm{e}^{\,t}\right]_0^{\ln(2)}\right) \\ &= (\ln(2))^2 \times \mathrm{e}^{\,\ln(2)} - 0 - \left(2\times\ln(2)\times\mathrm{e}^{\,\ln(2)} - 0 - \left(2\mathrm{e}^{\,\ln(2)} - 2\mathrm{e}^{\,0}\right)\right) \\ &= 2\,(\ln(2))^2 - 4\ln(2) + 2 \\ &= 2\left((\ln(2))^2 - 2\ln(2) + 1\right) \\ &= 2\,(\ln(2) - 1)^2 \end{aligned}$$

et ainsi $\displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2 \,\mathrm{d}x = 2\,(\ln(2) - 1)^2$