Exercice| [4852] | 1| Avec une intégration par parties

On se propose dans cet exercice, de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x \arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

**(1).** En remarquant que $x^2 = x^2 + 1 - 1$ calculer $J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

**(2).** À l'aide d'une intégration par parties montrer que $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}J$.

**(3).** Terminer le calcul de $I$.

**(4).** En déduire que : $I + J = \frac{1}{2}$.

Pistes de réflexion

**(1).** On se contente d'utiliser l'indication pour calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

**(2).** On effectue une intégration par partie en remarquant que $x\arctan(x) = x \times \arctan(x)$.

**(3).** On exploite simplement les deux questions précédentes.

**(4).** On exploite simplement les résultats précdents.

Éléments de correction

**(1).** Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= [t]_0^1 - [\arctan(x)]_0^1\\ &= (1-0) - (\arctan(1) - \arctan(0))\\ &= 1 - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

**(2).** On effectue l'intégration par parties suivante en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \frac{x^2}{2} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = x \\ v(x) = \arctan(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \frac{1}{x^2+1} \end{array}$$

où $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1^2}{2}\arctan(1) - \frac{0^2}{2}\arctan(0) - \frac{1}{2}J\\ &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}J\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}J\end{aligned}$$

**(3).** Il vient alors :

$$\begin{aligned} I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}J &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**(4).** Il est immédiat que :

$$\begin{aligned} I + J &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$