

Exercice [4851] | 1 | Effectuer une intégration par parties

À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^e x^2 \ln(x) dx$.

Pistes de réflexion

— On procède à une intégration par parties en remarquant que $x^2 \ln(x) = x^2 \times \ln(x)$.

Éléments de correction

On effectue l'intégration par parties suivante en posant :

$$\begin{array}{l} u(x) = \frac{x^3}{3} \quad \rightsquigarrow \quad u'(x) = x^2 \\ \text{se dérive en} \\ v(x) = \ln(x) \quad \rightsquigarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x} \\ \text{se dérive en} \end{array}$$

où u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[1; e]$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln(x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} \ln(e) - \frac{1^3}{3} \ln(1) - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{9} \right) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2e^3}{9} \end{aligned}$$