Exercice| [4850] | 1| Grands classiques de l'intégration par parties

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les deux intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Pistes de réflexion

- On remarquera que $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$.
- Et de même, on remarque que $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$.

Éléments de correction

Calcul de I_1 : on effectue l'intégration par parties suivante en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = 1 \\ v(x) = \arctan(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} I_1 &= [x\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= [x\arctan(x)]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 \\ &= 1 \times \arctan(1) - 0 - \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+1^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+0^2\right)\right) \\ &= 1 \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln(2) \end{aligned}$$

Calcul de I_2 : on effectue l'intégration par parties suivante en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} I_2 &= [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x \\ &= [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - [x]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 1 \times \ln(1) - (\mathrm{e} - 1) \\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$