Exercice| [4814] | 1| Suites géométriques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite géométriique de raison q, de premier terme u_0 et on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(1). On donne $u_0 = 3$ et $q = 4$. Calculer u_3.
(2). On donne $u_2 = -4$ et $q = 3$. Calculer u_6.
(3). On donne $u_1 = 5$ et $u_2 = 2$. Calculer q.
(4). On donne $u_0 = 1$ et $q = 2$. Calculer S_4.
(5). On donne $u_0 = 2$ et $u_1 = 8$. Calculer S_6.
(6). On donne $S_4 = 12$ et $S_5 = 7$. Calculer u_5.

Pistes de réflexion

(1). On utilise la formule donnant le terme d'indice n à partir de u_0 pour une suite géométrique.
(2). On utilise la formule reliant le terme d'indice p et d'indice q pour une suite géométrique.
(3). La raison d'une suite géométrique est égale au quotient de deux termes successifs.
(4). On appliquera directement la formule de calcul donnant la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique.
(5). On commencera par chercher la raison de cette suite géomémtrique avant d'appliquer directement la formule de calcul donnant la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique.
(6). On remarquera simplement que $S_5 = S_4 + u_5$.

Éléments de correction

(1). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 4$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 4^n$.
Par suite, il vient que : $$\begin{aligned} u_3 &= 3 \times 4^3 \\ &= 3 \times 64 \\ &= 204 \end{aligned}$$

(2). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite géométrique de raison 3, on a : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ u_p = u_q \times 3^{p-q}$.
Par suite, il vient que : $$\begin{aligned} u_6 &= u_2 \times 3^{6-2} \\ &= -4 \times 3^4 \\ &= -4 \times 81 \\ &= -324 \end{aligned}$$

(3). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite géométrique, la raison q de cette dernière est égale au quotient de deux de ses termes successifs.
Ainsi, on a : $$\begin{aligned} q &= \frac{u_2}{u_1} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

(4). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite géométrique de raison $2 \neq 1$ et de premier terme $u_0 = 1$, on en déduit que S_4 est la somme des $4+1$ premiers termes de cette dernière et on a :
$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=0}^{4} u_k \\ &= u_0 \times \frac{1-2^{4+1}}{1-2} \\ &= 1 \times \frac{1-32}{-1} \\ &= 31 \end{aligned}$$

(5). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique, sa raison q est égale au quotient de deux de ses termes successifs. Ainsi : $$\begin{aligned} q &= \frac{u_1}{u_0} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$
Par suite, comme $4 \neq 1$, puisque S_6 est la somme des $6+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :
$$\begin{aligned} S_6 &= u_0 \times \frac{1-4^{6+1}}{1-4} \\ &= 2 \times \frac{1-16384}{1-4} \\ &= \frac{2}{3} \times 16383 \\ &= \frac{32766}{3} \end{aligned}$$

(6). Puisque $S_5 = S_4 + u_5$, on a directement que $u_5 = S_5 - S_4$ ce qui donne $u_5 = -5$.