Exercice| [4813] | 1| Suites arithmétiques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_0 et on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(1). On donne $u_0 = -2$ et $r = 3$. Calculer u_4.
(2). On donne $u_2 = 1$ et $r = 2$. Calculer u_4.
(3). On donne $u_1 = -5$ et $u_2 = 2$. Calculer r.
(4). On donne $u_0 = 3$ et $u_5 = -1$. Calculer S_5.
(5). On donne $S_3 = 10$ et $u_4 = -3$. Calculer S_2.
(6). On donne $S_4 = 12$ et $S_5 = 16$. Calculer u_5.

Pistes de réflexion

(1). On donnera l'expression de u_n en fonction de n pour calculer u_4.
(2). On donnera la relation entre les termes d'indices différents.
(3). La différence entre deux termes successifs donne la valeur de la raison...
(4). On dispose d'une formule de calcul directe pour S_5 dans ce cas de figure.
(5). On commence par calculer S_4 pour ensuite trouver u_0 et r à l'aide u_4, pour ensuite avoir u_2 et finalement S_2.
(6). On a simplement que $S_5 = S_4 + u_5$.

Éléments de correction

(1). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison r.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2 + 3n$.
On a donc :
$$\begin{aligned} u_4 &= -2 + 3\times 4 \\ &= -2 + 12 \\ &= 10 \end{aligned}$$

(2). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2. On a alors : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_p = u_q + 2(p-q)$.
On a donc :
$$\begin{aligned} u_4 &= u_2 + 2(4-2) \\ &= 1 + 2\times 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

(3). Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et que u_1 et u_2 sont deux termes successifs de cette suite, on a $u_2 = u_1 + r$, c'est à dire $u_2 - u_1 = r$ ce qui donne $r = 7$.

(4). On a directement que :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{5} u_k &= \frac{u_0 + u_5}{2} \times (5+1) \\ &= \frac{3-1}{2} \times 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

(5). On a que :
$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=0}^{4} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{3} u_k + u_4 \\ &= 10 + (-3) \\ &= 7 \end{aligned}$$

On sait par ailleurs que : $S_4 = \frac{u_0 + u_4}{2} \times (4+1)$. Ainsi on a $7 = \frac{u_0 + (-3)}{2} \times 5$ ce qui donne que $u_0 = \frac{14}{5} + 3$ c'est à dire $u_0 = \frac{29}{5}$.

De plus, on sait que $u_4 = u_0 + 4\times r$, donc on en déduit que $r = \frac{u_4 - u_0}{4}$ ce qui donne $r = \frac{-3 - \frac{29}{5}}{4}$ et ainsi $r = -\frac{11}{5}$.

Par suite, $u_2 = u_0 + 2 \times \left(-\frac{11}{2}\right)$ ce qui donne $u_2 = \frac{7}{5}$.

On en déduit alors que :
$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{2} u_k \\ &= \frac{u_0 + u_2}{2} \times (2+1) \\ &= \frac{\frac{29}{5} + \frac{7}{5}}{2} \times 3 \\ &= \frac{\frac{36}{5}}{2} \times 3 \\ &= \frac{54}{5} \end{aligned}$$

(6). On a clairement que $S_5 = S_4 + u_5$, ce qui donne que $u_5 = S_5 - S_4$ et donc $u_5 = 4$.