Exercice| [4771] | 1| Équations de degré 2

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x en donnant éventuellement les solutions complexes :

(1). $(E_1) : x^2 - 8\sqrt{3}x + 64 = 0$
(2). $(E_2) : x^2 - 5x + 9 = 0$
(3). $(E_3) : x^2 + x + 1 = 0$
(4). $(E_4) : x^2 - 2x + 3 = 0$

Pistes de réflexion

Pour chacune de ces équations du second degré :
- on calculera le discriminant ;
- on mettra en forme les solutions selon le signe de ce discriminant.

Éléments de correction

(1). Le discriminant de (E_1) est : $\Delta = \left(-8\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 64 = 192 - 196 = -4$

Ainsi, (E_1) admet deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1 = \dfrac{8\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.
Or comme $z_1 = 4\sqrt{3} - \mathrm{i}$, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\left\{4\sqrt{3} - \mathrm{i}\,, 4\sqrt{3} + \mathrm{i}\right\}$$

(2). Le discriminant de (E_2) est : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 25 - 36 = -11$

Ainsi, (E_2) admet deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1 = \dfrac{5 - \mathrm{i}\sqrt{11}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

Or comme $z_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}$, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\left\{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}\,, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}\right\}$$

(3). Le discriminant de (E_3) est : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

Ainsi, (E_3) admet deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

Or comme $z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$\left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$$

(4). Le discriminant de (E_4) est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$

Ainsi, (E_4) admet deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1 = \dfrac{2 - \mathrm{i}\sqrt{8}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

Or comme $z_1 = 1 - \sqrt{2}\mathrm{i}$, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\left\{1 - \sqrt{2}\mathrm{i}\,, 1 + \sqrt{2}\mathrm{i}\right\}$$