Exercice| [4755] | 1| Moments d'une variable aléatoire à support fini

Soit X un variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = [\![1;8]\!]$ et telle que :

$$\forall k \in [\![1;7]\!],\ \mathbb{P}([X=k+1]) = 2 \times \mathbb{P}([X=k])$$

(1). Déterminer la loi de X.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par remarquer que l'on doit avoir $\sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}([X=k]) = 1$ et que la connaissance de $\mathbb{P}([X=1])$ suffit ensuite de connaître $\mathbb{P}([X=k])$ pour tout $k \in [\![2;8]\!]$.

(2). La loi de X étant connue, on obtiendra $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ par les formules usuelles.

Éléments de correction

(1). On doit avoir : $\begin{cases} \forall k \in [\![1;8]\!], \mathbb{P}([X=k]) \in [0;1] \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}([X=k]) = 0 \end{cases}$.

Compte-tenu de la relation vérifiée entre $\mathbb{P}([X=k])$ et $\mathbb{P}([X=k+1])$, on note $p = \mathbb{P}([X=1])$ et on obtient ainsi le tableau de loi de X :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}([X=k])$	p	$2p$	$4p$	$8p$	$16p$	$32p$	$64p$	$128p$

et on doit avoir $\sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}([X=k]) = 1$, ce qui donne ici : $p(1+2+4+8+16+32+64+128) = 1$ ce qui amène à :

$$p = \frac{1}{1+2+4+8+16+32+64+128} \text{ et donc que } p = \frac{1}{255}.$$

Par suite, la loi de X est :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{1}{255}$	$\frac{2}{255}$	$\frac{4}{255}$	$\frac{8}{255}$	$\frac{16}{255}$	$\frac{32}{255}$	$\frac{64}{255}$	$\frac{128}{255}$

(2). Puisque X est une variable aléatoire à support fini, elle admet une espérance qui est par définition $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{8} k \times \mathbb{P}([X=k])$.

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1 \times \frac{1}{255} + 2 \times \frac{2}{255} + 3 \times \frac{4}{255} + 4 \times \frac{8}{255} + 5 \times \frac{16}{255} \\ &\quad + 6 \times \frac{32}{255} + 7 \times \frac{64}{255} + 8 \times \frac{128}{255} \\ &= \frac{1+4+12+32+80+196+448+1024}{255} \\ &= \frac{1763}{255} \end{aligned}$$

De même X^2 admet une espérance qui est par définition $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{8} k^2 \times \mathbb{P}([X=k])$.

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{255} + 2^2 \times \frac{2}{255} + 3^2 \times \frac{4}{255} + 4^2 \times \frac{8}{255} \\ &\quad + 5^2 \times \frac{16}{255} + 6^2 \times \frac{32}{255} + 7^2 \times \frac{64}{255} + 8^2 \times \frac{128}{255} \\ &= \frac{1+8+48+128+400+1152+3136+8192}{255} \\ &= \frac{13065}{255} \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(X^2)$ existe, X admet une variance qui d'après la formule de Huygens est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Il vient donc que :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{13065}{255} - \left(\frac{1763}{255}\right)^2 \\ &= \frac{13065}{255} - \frac{3\,108\,169}{65\,025} \\ &= \frac{3\,331\,575}{65\,025} - \frac{3\,108\,169}{65\,025} \\ &= \frac{223\,406}{65\,025} \end{aligned}$$