Exercice| [4754] | 1| Système 3×3 à paramètres

Dans ce qui suit, λ désigne un réel quelconque.

(1). Déterminer en fonction de λ du rang du système 3×3 suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (\lambda-2)x + y + z = 0 \\ x + (\lambda-2)y + z = 0 \\ x + y + (\lambda-2)z = 0 \end{cases}$$

(2). Déterminer alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ lorsque $\mathcal{S}$ est de rang 1 ou de rang 2.

Pistes de réflexion

(1). On procède à une recherche du rang par échelonnement de la représentation matricielle du système, en discutant suivant les valeurs de λ du caractère licite de ces opérations, puis on traite les différents cas mis en évidence.

(2). On explicite le système pour les valeurs de λ conduisant à ces deux valeurs de rang, puis on les résout.

Éléments de correction

(1). On procède à un échelonnement en lignes de la représentation matricielle du système $\mathcal{S}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ \lambda-2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda-2)\,L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1-(\lambda-2)^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\,(3-\lambda) & 0 \end{array}\right)$$

Le rang de ce système étant le nombre de pivot non nuls de cette échelonnée, on en déduit que :

Si $\lambda = 3$: alors il n'y a qu'un seul pivot non nul, et donc le rang est égal à 1.

Si $\lambda = 0$: alors il n'y a que deux pivots nons nuls, et donc le rang es égal à 2.

(2). **Cas où $\lambda = 3$:** en reprenant les calculs en remplaçant λ par 3, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \end{array}\right) \sim_L \quad \dots \quad \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ce qui permet d'écrire les relations $\{\ x = -y - z$ et donc l'ensemble des solutions de ce système est $\left\{(-y-z, y, z)\,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Cas où $\lambda = 0$: en reprenant les calculs en remplaçant λ par 0, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \end{array}\right) \sim_L \dots \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ce qui permet d'écrire les relations $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ et donc l'ensemble des solutions de ce système est $\{(z, z, z)\,,\ z \in \mathbb{R}\}$.