Exercice| [4753] | 1| Systèmes linéaires rectangulaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(1). $\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x - \ y + z = 1 \\ x - \ y + z = 1 \\ -x - \ y + z = -1 \\ -2x - 2y + z = 2 \end{cases}$

(2). $\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 1 \\ x - y - z - t = -1 \end{cases}$

Pistes de réflexion

— On écrit la représentation matricielle de ces deux systèmes. . .
— . . . que l'on échelonne de sorte à obtenir leur forme échelonneée réduite en lignes.

Éléments de correction

(1). On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -2L_2 \\ L_3 \leftarrow -1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Le système présente une équation de compatibilité :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & = & -2 \end{array} \right. \qquad \text{Relation impossible}$$

Au moins une équation de compatibilité n'est pas vérifiée. Le système est donc incompatible.

(2). On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En notant x_1, . . . , x_4 les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x_1 & = & -\frac{1}{2} \\ x_2 & = & -\frac{1}{2} - x_3 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de ce système est $\left\{ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - x_3, x_3, 1 \right), x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.