Exercice| [4752] | 1| Écriture de solutions

On donne ci-après des matrices augmentées équivalentes en lignes à celles d'un système linéaire $\mathcal{S}$ initialement donné. Lorsque c'est possible, donner le rang du système puis déterminer les solutions du système $\mathcal{S}$, et sinon, poursuivre les opérations élémentaires nécessaires pour pouvoir le faire.

(1). $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

(2). $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(3). $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(4). $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(5). $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(6). $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(7). $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Pistes de réflexion

- On vérifie que l'on a une forme pseudo-triangulaire supérieure... puis que tous les pivots sont égaux à 1... puis que ce sont les seuls éléments non nuls dans leur colonne pour avoir une forme échelonnée réduite.
- Le rang quant à lui correspond au nombre de pivots non nuls.
- On explicite ensuite les solutions lorsque l'on a un système échelonné réduit.

Éléments de correction

(1). Il s'agit bien d'un système échelonné réduit en lignes.

De la représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$, on en déduit que le rang de ce système est égal à 2, que les inconnues principales sont x_1 et x_2, et que x_3 est une inconnue secondaire. Par ailleurs on en déduit les relations suivantes entre les inconnues x_1, x_2 et x_3 : $\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

Par suite, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(2 - x_3, 1, x_3),\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

(2). Les pivots sont bien tous égaux à 1, mais ne sont pas les seuls éléments nuls de leur colonne, donc $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ n'est pas une représentation matricielle d'un système échelonné en lignes. On peut toutefois voir que le système est de rang 3, et comme il s'agit d'un système de taille 3×3, on sait qu'il possède une unique solution dans ce cas. On poursuit alors l'échelonnement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations suivantes entre les inconnues x_1, x_2 et x_3 : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Par suite, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(1, 0, 1)\}$.

(3). Il s'agit bien d'un système échelonné réduit en lignes.

De la représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$, on en déduit que le rang de ce système est égal à 2, que les inconnues principales sont x_1 et x_2, et que x_3 et x_4 sont des inconnues secondaires. Par ailleurs on en déduit les relations suivantes entre les inconnues x_1, x_2, x_3 et x_4 : $\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 \end{cases}$.

Par suite, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(2 - x_3, 1 - 2x_3, x_3, x_4),\ (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\}$.

(4). Les pivots sont bien tous égaux à 1, mais ne sont pas les seuls éléments nuls de leur colonne, donc $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ n'est pas une représentation matricielle d'un système échelonné en lignes. On ne peut pas y lire le rang... on poursuit donc l'échelonnement.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations suivantes entre les inconnues x_1, x_2 et x_3 : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Par suite, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(1, 0, 1)\}$.

(5). Les pivots sont bien tous égaux à 1, mais ne sont pas les seuls éléments nuls de leur colonne, donc $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ n'est pas une représentation matricielle d'un système échelonné en lignes. On peut toutefois dire que le rang du système est égal 3, que les inconnues principales sont x_1, x_2 et x_4 et que x_4 est une inconnue secondaire. On poursuit alors l'échelonnement du système.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations suivantes entre les inconnues x_1, x_2, x_3 et x_4 : $\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 - x_4 \end{cases}$

Par suite, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(2 - x_4, 0, 1 - x_4, x_4),\ x_4 \in \mathbb{R}\}$.

(6). Il s'agit bien d'un système échelonné réduit en lignes.

De la représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, on en déduit que le rang de ce système est égal à 3, que les inconnues principales sont x_1, x_2 et x_3 et que x_4 est une inconnue secondaire. Par ailleurs on en déduit les relations suivantes entre les inconnues x_1, x_2, x_3 et x_4 : $\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \end{cases}$.

Par suite, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(2 - x_4, 1 - 2x_4, 1 - x_4, x_4)\,,\, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

(7). Les pivots sont bien tous égaux à 1, mais ne sont pas les seuls éléments nuls de leur colonne, donc $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ n'est pas une représentation matricielle d'un système échelonné en lignes. On peut toutefois voir que le système est de rang 4, et comme il s'agit d'un système de taille 4×4, on sait qu'il possède une unique solution dans ce cas. On poursuit alors l'échelonnement :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations suivantes entre les inconnues x_1, x_2, x_3 et x_4 : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$

Par suite, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(1, 0, 0, 1)\}$.