Exercice| [4751] | 1| Systèmes 2×2

Résoudre les systèmes linéaires 2×2 suivants :

(1). $(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x - y = 0 \\ 7x + 3y = 5 \end{cases}$ | **(2).** $(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ 3x - 7y = 8 \end{cases}$

Pistes de réflexion

— On écrit la représentation matricielle de ces deux systèmes...
— ...que l'on échelonne de sorte à obtenir leur forme échelonneée réduite en lignes.

Éléments de correction

(1). On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{array}\right)$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang du système est donc 2.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{10}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 10 & 5 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{10}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

En notant x et y les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x & = & \dfrac{1}{2} \\ y & = & \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de ce système est $\left\{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

(2). On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 8 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang du système est donc 2.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En notant x et y les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x & = & 5 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(5,1)\}$.