Exercice| [4750] | 1| Système 3×3 à paramètres

Dans tout ce qui suit m désigne un réel quelconque.
Discuter en fonction de m de la compatibilité du système $\mathcal{S}$ suivant, et le cas échéant, en donner les solutions : $\mathcal{S}$: $\begin{cases} x-\ \ my+m^2z=2m\\ mx-m^2y+\ \ mz=2m\\ mx+\ \ \ \ \ y-m^2z=1-m\end{cases}$.

Pistes de réflexion

— Utiliser la représentaton matricielle du système.
— Échelonner la matrice augmentée du système et discuter sur la nature des opérations élémentaires effectuées conditionnées par les valeurs de k pour poursuivre l'échelonnement et étudier chacun des cas soulevés.

Éléments de correction

Écrivons la matrice augmentée du système $\mathcal{S}$ et échelonnons dans un premier temps cette dernière.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & 2m\\ m & -m^2 & m & 2m\\ m & 1 & -m^2 & 1-m\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-mL_1\\ L_3\leftarrow L_3-mL_1}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & 2m\\ 0 & 0 & m-m^3 & 2m-2m^2\\ 0 & 1-m^2 & -m^2-m^3 & 1-m-2m^2\end{array}\right)$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & 2m\\ 0 & 1-m^2 & -m^2-m^3 & 1-m-2m^2\\ 0 & 0 & m-m^3 & 2m-2m^2\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Si } m-m^3\neq 0\\ L_1\leftarrow \frac{1}{m-m^3}L_3}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & 2m\\ 0 & 1-m^2 & -m^2-m^3 & 1-m-2m^2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2m-2m^2}{m-m^3}\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+\left(m^2+m^3\right)L_3\\ L_1\leftarrow L_1-m^2L_3}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 0 & \frac{2m^2-4m^3+2m^4}{m-m^3}\\ 0 & 1-m^2 & 0 & \frac{m-m^2-5m^3+m^4+4m^5}{m-m^3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2m-2m^2}{m-m^3}\end{array}\right)$$

On remarquera à ce stade que puisque $m-m^3\neq 0$, on a $m\notin\{-1,0,1\}$ et qu'ainsi dans un premier temps une première simplification par m donne que :
$\dfrac{2m-2m^2}{m-m^3}=\dfrac{2-m}{1-m^2}$
$\dfrac{m-m^2-5m^3+m^4+4m^5}{m-m^3}=\dfrac{1-m-5m^2+m^3+4m^4}{1-m^2}$
$\dfrac{2m^2-4m^3+2m^4}{m-m^3}=\dfrac{2m-4m^2+2m^3}{1-m^2}$
puis que : $1-m-5m^2+m^3+4m^4=(m-1)(m+1)\left(4m^2+m-1\right)$
et que : $2m-4m^2+2m^3=2m(m-1)^2$

et comme on a clairement que $m-m^3=m(1-m)(1+m)$
on pourra simplifier par $(m-1)(m+1)$ le quotient $\dfrac{m-m^2-5m^3+m^4+4m^5}{m-m^3}=\dfrac{-4m^2-m+1}{m}$
et par $m(m-1)$ le quotient $\dfrac{2m^2-4m^3+2m^4}{m-m^3}=-\dfrac{2(m-1)}{1+m}$
On reprend alors l'échelonnement avec ces simplifications :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 0 & \frac{2m^2-4m^3+2m^4}{m-m^3}\\ 0 & 1-m^2 & 0 & \frac{m-m^2-5m^3+m^4+4m^5}{m-m^3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2m-2m^2}{m-m^3}\end{array}\right)\sim_L\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 0 & -\dfrac{2(m-1)}{1+m}\\ 0 & 1-m^2 & 0 & \dfrac{-4m^2-m+1}{m}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2-m}{1-m^2}\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Puisque } m-m^3\neq 0 \text{Si } 1-m^2\neq 0\\ L_2\leftarrow\frac{1}{1-m^2}L_2}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 0 & -\dfrac{2(m-1)}{1+m}\\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-4m^2-m+1}{m\left(1-m^2\right)}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2-m}{1-m^2}\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1+mL_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2m^2+5m-3}{m^2-1}\\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-4m^2-m+1}{m\left(1-m^2\right)}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2-m}{1-m^2}\end{array}\right)$$

On en déduit alors les éléments de discussions suivants :

Si $m\notin\{-1,0,1\}$: le système possède une unique solution qui est le triplet $\left(\dfrac{2m^2+5m-3}{m^2-1},\dfrac{-4m^2-m+1}{m\left(1-m^2\right)},\dfrac{2-m}{1-m^2}\right)$.

Si $m=0$: on travaille en fait avec le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ qui permet d'écrire les relations $\begin{cases} x=0\\ y=1\end{cases}$ et d'en déduire que l'ensemble des solutions de ce système dans ce cas est $\{(0,1,z)\,,\ z\in\mathbb{R}\}$.

Si $m=1$: on travaille en fait avec le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$ qui est équivalent en lignes d'après les calculs précédents à :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\underset{L_2\leftarrow\frac{1}{2}L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

d'où l'on tire les relations $\left\{\begin{array}{l} x = 1+y \\ z = 1 \end{array}\right.$ et donc l'ensemble des solutions est $\{(1+y, y, 1)\,,\, y \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = -1$ on travaille en fait avec le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ qui est équivalent en lignes d'après les calculs précédents à $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ où la dernière ligne donne une équation de compatibilité qui amène à un système incompatible.