Exercice| [4749] | 1| Système 2×2 à paramètres

Dans tout ce qui suit m désigne un réel quelconque.
Discuter en fonction de m de la compatibilité du système $\mathcal{S}$ suivant, et le cas échéant, en donner les solutions : $\mathcal{S} : \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$.

Pistes de réflexion

- On cherche à procéder un échelonnement réduit en lignes, en s'intérressant aux conditions de réalisation des opérations élémentaires en fonction de m.
- On pensera à étudier les cas correspondants aux valeurs de m remarquées dans les discussions précédentes.

Éléments de correction

On procède à un échelonnement réduit en lignes de la représentation matriciele de ce système :

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+1 & m & 2m \\ m & m+1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{Pour } m\neq -1 \\ L_2 \leftarrow (m+1)L_2 - mL_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} m+1 & m & 2m \\ 0 & 2m+1 & -2m^2+m+1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Pour } m\neq -\frac{1}{2} \\ L_1 \leftarrow (2m+1)L_1 - mL_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} (2m+1)(m+1) & 0 & 2m^3+3m^2+m \\ 0 & 2m+1 & -2m^2+m+1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Comme ici } m\neq -1 \text{ et } m\neq -\frac{1}{2} \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{(2m+1)(m+1)}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2m+1}}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{2m^3+3m^2+m}{(2m+1)(m+1)} \\ 0 & 1 & \dfrac{-2m^2+m+1}{2m+1} \end{array}\right)$$

On en déduit donc les éléments de discussions suivants :

Pour $m \notin \left\{-1, -\dfrac{1}{2}\right\}$ **:** on en déduit les relations $\begin{cases} x = \dfrac{2m^3+3m^2+m}{(2m+1)(m+1)} \\ y = \dfrac{-2m^2+m+1}{2m+1} \end{cases}$ et donc l'ensemble des solutions dans ce cas est $\left\{\left(\dfrac{2m^3+3m^2+m}{(2m+1)(m+1)}, \dfrac{-2m^2+m+1}{2m+1}\right)\right\}$.

Pour $m = -1$ **:** on travaille en fait avec le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ où l'on a :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ et donc l'ensemble des solutions dans ce cas est $\{(-1, 2)\}$.

Si $m = -\dfrac{1}{2}$ **:** on travaille en fait avec le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$ où l'on a :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit les relations $\{\ x = -2 + y$ et donc l'ensemble des solutions dans ce cas est $\{(-2+y, y), y \in \mathbb{R}\}$.