Exercice| [4719] | 1| Changement de base pour un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ ax^2+bx+c & \longmapsto & (3c-b+a)+(2c+a)x+ax^2 \end{array} \right.$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

(1). Montrer que la famille $\mathcal{C} = (1+x-x^2, x+x^2, 1+x)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

(3). En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra obtenir le caractère base de cette famille en étudiant le rang de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). La matrice de passage cherchée est en fait déjà écrite. . .

(3). On mobilisera la formule de changement de base pour les endomorphismes, qui demandera ici le calcul de l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Éléments de correction

(1). Puisque $\mathbb{R}_2[x]$ est un espace de dimension 3 et que $\mathcal{C}$ est une famille de 3 vecteurs, en notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$, par théorème, on a :

$$(\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x]) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}(M) = 3)$$

Par définition, on a : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient le rang de M par échelonnement en lignes de cette dernière :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice M est de rang 3, et par suite, que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Par définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{BC}}$, on a : $P_{\mathcal{BC}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

Ainsi, on a : $P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

que l'on notera simplement P par la suite.

(3). **Formule de changement de bases pour les endomorphismes :** en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, la formule de changement de base pour les endmorphismes donne la relation :

$$B = P^{-1}AP$$

Recherche de la matrice A : un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & (3\times 1 - 0 + 0) + (2\times 1 + 0)x + 0 \times x^2 \\ & = & 3 + 2x \\ f(x) & = & (3\times 0 - 1 + 0) + (2\times 0 + 0)x + 0 \times x^2 \\ & = & -1 \\ f(x^2) & = & (3\times 0 - 0 + 1) + (2\times 0 + 1)x + 1 \times x^2 \\ & = & 1 + x + x^2 \end{array}$$

et par suite, on a donc : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Recherche de P^{-1} : on obtient l'inverse de la matrice P par échelonnement réduit en lignes de la matrice augmentée $(P|\mathrm{I}_2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice P est ainsi : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de la matrice B : un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} B & = & P^{-1}AP \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$