Exercice| [4715] | 1| Supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$

Soient $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = P'(0) = 0\}$ et $F_2 = \mathbb{R}_1[X]$.
Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = F_1 \oplus F_2$.

Pistes de réflexion

— On pourra procéder à un raisonnement par analyse-synthèse pour déterminer la décomposition d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $F_1 + F_2$.

Éléments de correction

Montrons que tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ sécrit de manière unique sous la forme $P = \underbrace{P_1}_{\in F_1} + \underbrace{P_2}_{\in P_2}$.

Effectuons un raisonnement par analyse-synthèse pour déterminer cette décomposition et en montrer l'unicité.

Analyse : Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et supposons que l'on ait $(P_1, P_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $P = P_1 + P_2$, c'est à dire que : $\quad , P_(X) = P_1(X) + P_2(X)$.

Puisque $P_2 \in F_2$, il eXiste $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall X \in \mathbb{R},\ P_2(X) = aX + b$.

Comme $P(0) = P_1(0) + P_2(0)$ et que $P_1 \in F_1$ donc tel que $P_1(0) = 0$, il vient que $b = P(0)$.

De même, puisque : $\quad \forall P'(X) = P_1'(X) + \underbrace{P_2'(X)}_{=a},$

il vient que $P'(0) = P_1'(0) + P_2'(0)$ et que $P_1 \in F_1$ donc tel que $P_1'(0) = 0$, il vient que $a = P'(0)$.

Par suite, on a : $\quad P(X) = P_1(X) + P'(0)X + P(0)$.

Synthèse : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux polynômes P_1 et P_2 par : $P_2(X) = P'(0)X + P(0)$ et $P_1(X) = P(X) - P_2(X)$.

Il est immédiat que $P_2 \in F_2$.

Vérifions que $P_1 \in F_1$.

On a directement que :
$$\begin{aligned} P_1(0) &= P(0) - (P'(0) \times 0 - P(0)) \\ &= P(0) - P(0) \\ &= 0 \end{aligned}.$$

Comme pour tout $X \in \mathbb{R},\ P_1'(X) = P'(X) - P'(0)$ on a directement que $P_1'(0) = 0$, et finalement $P_1 \in F_1$.

Conclusion : tout élément de $\mathbb{R}_2[X]$ se décompose de manière unique sur $F_1 + F_2$.