Exercice| [4714] | 1| Somme directe dans $\mathbb{R}_2[X]$

Soient $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = P'(0) = 0\}$ et $F_2 = \mathbb{R}_1[X]$.

(1). Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe.

Pistes de réflexion

(1). On vérifie en particulier que F_1 est stable par combinaison linéaire, en s'étant au préalable assuré que F_1 est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). On pourra utiliser la caractérisation des sommes directes par l'intersection des deuX sous-espaces constituant la somme.

Éléments de correction

(1). F_1 **est un sous-ensemble de** $\mathbb{R}_2[X]$ **:** en effet, par définition de F_1, tout élément de F_1 est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$.

F_1 **contient le vecteur nul de** $\mathbb{R}_2[X]$ **:** le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est le polynôme nul $\tilde{0}$, qui vérifie trivialement que $\tilde{0}(0) = 0$ et $\tilde{0}'(0) = 0$.

F_1 **est stable par combinaison linéaire :** soient $(P, Q) \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posons $R = \lambda P + Q$.

On a clairement que $R' = \lambda P' + Q'$ et des calculs directs donnent que :

$$\begin{aligned} R(0) &= (\lambda P + Q)(0) \\ &\underset{\substack{\textbf{Linéarité de} \\ \textbf{l'évaluation}}}{=} \lambda P(0) + Q(0) \\ &\underset{\substack{P \in F_1 \Rightarrow P(0)=0 \\ Q \in F_1 \Rightarrow Q(0)=0}}{=} \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et sur le même principe :

$$\begin{aligned} R'(0) &= (\lambda P' + Q')(0) \\ &\underset{\substack{\textbf{Linéarité de} \\ \textbf{l'évaluation}}}{=} \lambda P'(0) + Q'(0) \\ &\underset{\substack{P \in F_1 \Rightarrow P'(0)=0 \\ Q \in F_1 \Rightarrow Q'(0)=0}}{=} \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et ainsi $R \in F_1$, c'est à dire $\lambda P + Q \in F_1$.

(2). Par théorème, on sait que :

$$(\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$$

Puisque $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, il contient nécessairement le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est à dire le polynôme nul $\tilde{0}$.

Montrons donc que le seul élément de $F_1 \cap F_2$ est le polynôme nul.

Soit alors $P \in F_1 \cap F_2$.

En particulier $P \in F_2$, donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad P(X) = aX + b$.

Or on a aussi $P \in F_1$, c'est à dire $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$.

Comme $P(0) = 0$, il vient que $b = 0$. Ainsi : $\quad P'(X) = a$.

Comme $P'(0) = 0$, on en déduit que $a = 0$, et par suite que $P = \tilde{0}$ ce qui assure que $F_1 \cap F_2 = \left\{\tilde{0}\right\}$.