Exercice| [4693] | 1| Calcul d'intégrale

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-3x} \cos(4x)\,\mathrm{d}x$.

Pistes de réflexion

— On procède à deux intégrations par parties successives, réalisées sur le même choix de dérivation d'un des facteurs, pour obtenir une relation vérifiée par l'intégrale I.

Éléments de correction

On effectue l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{-3x} \\ v(x) = \cos(4x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = -4\sin(4x) \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\right) \times (-4\sin(4x))\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-3x}\sin(4x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{-3x} \\ v(x) = \sin(4x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = 4\cos(4x) \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad -\frac{4}{3}\left(\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\right)\times(4\cos(4x))\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad -\frac{4}{3}\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{9}\left[\mathrm{e}^{-3x}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad -\frac{16}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit la relation :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x + \frac{16}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{9}\left[\mathrm{e}^{-3x}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ou encore : $\displaystyle \frac{25}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{9}\left[\mathrm{e}^{-3x}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

et finalement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{25}\left(-\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{9}\left[\mathrm{e}^{-3x}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-3x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x &= \frac{9}{25}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}\cos\left(4\times\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\times 0}\times\cos(4\times 0)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}\sin\left(4\times\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-3\times 0}\sin(4\times 0)\right) \\ &= \frac{9}{25}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}\times 1 + \frac{1}{3}\times 1\times 1 + 0 - 0\right) \\ &= \frac{9}{25}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{3}{25} + \frac{3}{25}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$