Exercice| [4692] | 1| Calcul d'intégrale

Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \left(x^2 + 2x - 1\right) \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x$.

Pistes de réflexion

— On procède à deux intégrations par parties successives en faisant le choix d'abaisser le degré du facteur polynomial.

Éléments de correction

On effectue l'intégration par parties suivante en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \\ v(x) = x^2 + 2x - 1 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = 2x + 2 \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x^2 + 2x - 1\right) \mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\left(x^2 + 2x - 1\right)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\left(2x + 2\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (2x + 2)\mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \\ v(x) = 2x + 2 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = 2 \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x^2 + 2x - 1\right) \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}(2x + 2)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \times 2 \, \mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2x}(2x + 2)\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2x}(2x + 2)\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\left(1^2 + 2 \times 1 - 1\right)\mathrm{e}^{-2\times 1} - \left(0^2 + 2 \times 0 - 1\right)\mathrm{e}^{-2\times 0}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\times 1}\left(2 \times 1 + 2\right) - \mathrm{e}^{-2\times 0}\left(2 \times 0 + 2\right)\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 1} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(2\mathrm{e}^{-2} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(4\mathrm{e}^{-2} - 2\right) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x^2 + 2x - 1\right) \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\left(2\mathrm{e}^{-2} + 1\right) - \frac{1}{4}\left(4\mathrm{e}^{-2} - 2\right) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= -\mathrm{e}^{-2} -) \frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{9}{4}\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$