Exercice| [4635] | 1| Succession de tirages

On dispose d'une boîte qui contient deux jetons, un noir et un blanc.
On procède à une succession de n tirages dans cette boîte en le remettant entre chaque tirage après en avoir noté la couleur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n et D_n les événements suivants :

A_n **:** « on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »

D_n **:** « on obtient au plus un jeton noir »

(1). Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(2). Dans le cas où $n = 2$, les deux événements A_n et D_n sont-ils indépendants ?

(3). Même question dans le cas où $n = 3$.

Pistes de réflexion

(1). On s'intéressera plutôt à $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$, car l'événement $\overline{A_n}$ est bien plus simple à décrire. Pour D_n, on traduira sous forme d'une union disjointe la notion de « au plus un jeton noir ».

(2). On vérifiera si $\mathbb{P}(A_2 \cap D_2) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(D_2)$.

(3). On vérifiera si $\mathbb{P}(A_3 \cap D_3) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(D_3)$.

Éléments de correction

Dans tout l'exercice, on désigne par B_n (resp. N_n) l'événement « le n^{e} tirage a donné un jeton blanc (resp. noir) ».

(1). Calcul de $\mathbb{P}(A_n)$: Il est immédiat que : $\overline{A_n} = \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} N_n\right)$, cette union étant disjointe.

On en déduit donc que : $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} N_k\right)$.

Les tirages dans cette urne étant supposé avec remise, on peut supposer que les événements $(B_1, \ldots, B_n)$ sont indépendants entre eux, et que les événements $(N_1, \ldots, N_n)$ aussi.

On en déduit donc que : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$ et $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} N_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_k)$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(N_k) = \frac{1}{2}$.

On en déduit donc que :
$$\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

et par suite, $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Calcul de $\mathbb{P}(D_n)$: en notant U_n l'événement « on obtient un seul jeton noir au cours des n tirages », il vient que $D_n = U_n \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$, cette union étant disjointe. Par suite, il vient : $\mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}(R_n) + \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)}_{=\frac{1}{2^n}}$.

De plus, on a : $U_n = \bigcup_{k=1}^{n}$ [le k^{e}tirage a donné un jeton noir et tous les autres un jeton blanc], cette union étant disjointe.

On en déduit donc que : $\mathbb{P}(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}$([le k^{e}tirage a donné un jeton noir et tous les autres un jeton blanc])

où par indépendance des tirages, il vient que : $\mathbb{P}$([le k^{e}tirage a donné un jeton noir et tous les autres un jeton blanc]) $= \frac{1}{2^n}$.

Il vient donc que $\mathbb{P}(U_n) = \frac{n}{2^n}$ et finalement que $\mathbb{P}(D_n) = \frac{n+1}{2^n}$.

(2). D'après les calculs précédents, on a $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(D_2) = \frac{3}{4}$ et ainsi, $\mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(D_2) = \frac{3}{8}$.

On a par définition : $A_2 \cap D_2$: « au cours des deux tirages, on obtient des jetons des deux couleurs avec au plus un jeton noir ».

Avec les notations précédentes : $A_2 \cap D_2 = (R_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap R_2)$, cette union étant disjointe.

On en déduit avec les mêmes arguments d'indépendance que $\mathbb{P}(A_2 \cap D_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, c'est à dire $\mathbb{P}(A_2 \cap D_2) = \frac{1}{2}$.

Puisque $\mathbb{P}(A_2 \cap D_2) \neq \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(D_2)$, on en déduit que les deux événements A_2 et D_2 ne sont pas indépendants.

(3). D'après les calculs précédents, on a $\mathbb{P}(A_3) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(D_3) = \frac{1}{2}$ et ainsi, $\mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(D_3) = \frac{3}{8}$.

Comme : $A_3 \cap D_3$:« au cours des 3 tirages, on obtient des jetons des deux couleursa avec au plus un jeton noir », il vient : $A_3 \cap D_3 = (R_1 \cap R_2 \cap N_3) \cup (R_1 \cap N_2 \cap R_3) \cup (N_1 \cap R_2 \cap R_3)$, cette union étant disjointe, et par les mêmes arguments d'indépendance que précédemment : $\mathbb{P}(A_3 \cap D_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

On en déduit donc que $\mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(A_3 \cap B_3)$ et par conséquent que les événements A_3 et B_3 sont indépendants.