Exercice| [4598] | 1| Intégrale impropre d'une fraction rationnelle

Déterminer la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{2t+1}{(2t-1)\,(4-t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Pistes de réflexion

- On peut éventuellement établir la convergence de l'intégrale avant d'en calculer sa valeur, en utilisant par exemple le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives.
- On procèdera avant primitivation, à une décomposition du quotient définissant la fonction à intégrer, sous forme d'une somme d'inverses de fonctions affines.

Éléments de correction

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{2t+1}{(2t-1)\,(4-t^2)}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[4;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Étude de la convergence : On a par ailleurs que :

- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2t}{2t\times(-t^2)} = -\dfrac{1}{t^2}$
- La fonction $t \longmapsto -\dfrac{1}{t^2}$ est négative au voisinage de $+\infty$ donc par équivalence f aussi.
- $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente

par suite, d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions de signe constant, l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Calcul de la valeur de $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$: On commence par remarquer que :

$$\forall t \in [4;+\infty[\,,\ f(t) = \frac{2t+1}{(2t-1)\,(2-t)\,(2+t)}$$

Déterminons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\quad \forall t \in [4;+\infty[\,,\ f(t) = \dfrac{a}{2t-1} + \dfrac{b}{2-t} + \dfrac{c}{2+t}$.

Il est immédiat que :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [4;+\infty[\,,\ \frac{a}{2t-1} + \frac{b}{2-t} + \frac{c}{2+t} &= \frac{a\left(4-t^2\right) + b\,(2t-1)\,(2+t) + b\,(2t-1)\,(2-t)}{(2t-1)\,(4-t^2)} \\
&= \frac{4a - at^2 + b\left(2t^2+3t-2\right) + c\left(-2t^2+5t-2\right)}{(2t-1)\,(4t{-}^{2})} \\
&= \frac{(-a+2b-2c)\,t^2 + (3b+5c)\,t + 4a - 2b - 2c}{(2t-1)\,(4-t^2)}
\end{aligned}$$

et ainsi, par identification, (a,b,c) est solution du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$ que l'on résout par échelonnement.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{10}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -20 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -\frac{8}{15} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -20 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow -1L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{20}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} \end{array}\right)$$

Ainsi, on en déduit que : $\begin{cases} a = \dfrac{8}{15} \\ b = \dfrac{5}{12} \\ c = \dfrac{3}{20} \end{cases}$

Finalement, il vient que : $\quad \forall t \in [4;+\infty[\,,\ f(t) = \dfrac{8}{15}\dfrac{1}{2t-1} + \dfrac{5}{12}\dfrac{1}{2-t} + \dfrac{3}{20}\dfrac{1}{2+t}$

Soit alors $A \geq 4$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_4^A f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_4^A \left(\frac{8}{15}\frac{1}{2t-1} + \frac{5}{12}\frac{1}{2-t} + \frac{3}{20}\frac{1}{2+t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_4^A \left(\frac{8}{15}\frac{1}{2t-1} + \frac{5}{12}\times\frac{-1}{t-2} + \frac{3}{20}\frac{1}{2+t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}\ln(2t-1) + \frac{5}{12}\times(-\ln(t-2)) + \frac{3}{20}\ln(2+t)\right]_4^A \\
&= \frac{8}{15}\times\frac{1}{2}\ln(2A-1) + \frac{5}{12}\times(-\ln(A-2)) + \frac{3}{20}\ln(2+A) \\
&\quad - \left(\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}\ln(7) + \frac{5}{12}\times(-\ln(2)) + \frac{3}{20}\ln(6)\right) \\
&= \frac{4}{15}\ln(2A-1) - \frac{5}{12}\ln(A-2) + \frac{3}{20}\ln(2+A) \\
&\quad - \left(\frac{4}{15}\ln(7) - \frac{5}{12}\ln(2) + \frac{3}{20}\ln(6)\right) \\
&= \ln\left(\frac{(2A-1)^{\frac{4}{15}}\,(2+A)^{\frac{3}{20}}}{(A-2)^{\frac{5}{12}}}\right) \\
&\quad - \left(\frac{4}{15}\ln(7) - \frac{5}{12}\ln(2) + \frac{3}{20}\ln(6)\right)
\end{aligned}$$

Or on a : $\quad \dfrac{(2A-1)^{\frac{4}{15}}\,(2+A)^{\frac{3}{20}}}{(A-2)^{\frac{5}{12}}} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{\frac{4}{15}}A^{\frac{4}{15}}\times A^{\frac{3}{20}}}{A^{\frac{5}{15}}} = 2^{\frac{4}{15}}$

donc par composition par la fonction logarithme $\ln\left(\dfrac{(2A-1)^{\frac{4}{15}}\,(2+A)^{\frac{3}{20}}}{(A-2)^{\frac{5}{12}}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(2^{\frac{4}{15}}\right)$

Finalement, il vient que $\displaystyle\int_4^A f(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(2^{\frac{4}{15}}\right) - \frac{4}{15}\ln(7) + \frac{5}{12}\ln(2) - \frac{3}{20}\ln(6)$ ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ déjà acquise au demeurant, sa valeur, à savoir :

$$\begin{aligned}
\int_4^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \ln\left(2^{\frac{4}{15}}\right) - \frac{4}{15}\ln(7) + \frac{5}{12}\ln(2) - \frac{3}{20}\ln(6)\\
&= \ln\left(\frac{2^{\frac{4}{15}} \times 2^{\frac{5}{12}}}{7^{\frac{4}{15}} \times 6^{\frac{3}{20}}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{2^{\frac{41}{60}}}{7^{\frac{4}{15}} \times 3^{\frac{3}{20}} \times 2^{\frac{3}{20}}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{2^{\frac{8}{15}}}{7^{\frac{4}{15}} \times 3^{\frac{3}{20}}}\right)
\end{aligned}$$