Exercice| [4581] | 1| Projecteurs et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel. On suppose que p est un projecteur de E, s une symétrie vectorielle de E et $\overrightarrow{b} \in E$ est un vecteur donné.

(1). Résoudre l'équation $(\star_1)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $(\star_1) : \overrightarrow{x} + p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.

(2). Résoudre l'équation $(\star_2)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $(\star_2) : \overrightarrow{x} + 2s\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.

Pistes de réflexion

(1). On se souviendra de la propriété caractéristique des projecteurs. . .et on fera un raisonnement soit par analyse-synthèse, soit par implication ce qui demandera dans les deux cas de vérifier les solutions obtenues.

(2). On se souviendra de la propriété caractéristique des symétries et on fera un raisonnement soit par analyse-synthèse, soit par implication ce qui demandera dans les deux cas de vérifier les solutions obtenues.

Éléments de correction

(1). **Analyse :** supposons que $\overrightarrow{x}$ soit solution de $(\star_1)$. Comme p est un projecteur, on sait que $p \circ p = p$.

Ainsi, en composant $(\star)_1$ par p, il vient : $p\left(\overrightarrow{x}\right) + \underbrace{p\left(p\left(\overrightarrow{x}\right)\right)}_{=p\left(\overrightarrow{x}\right)} = p\left(\overrightarrow{b}\right)$.

D'où il vient que $p\left(\overrightarrow{x}\right) = \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)$.

Par suite, en reportant dans $(\star_1)$, on aura $\overrightarrow{x} + \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{b}$ ce qui donne $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)$.

Synthèse : on pose $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)$. Montrons que $\overrightarrow{x}$ est solution de $(\star_1)$.

On a donc :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} + p\left(\overrightarrow{x}\right) &= \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) + p\left(\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)\right) \\
&\underset{p\in\mathcal{L}(E)}{=} \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) + p\left(\overrightarrow{b}\right) - \frac{1}{2}\underbrace{p\circ p\left(\overrightarrow{b}\right)}_{=p\left(\overrightarrow{b}\right)} \\
&= \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) + p\left(\overrightarrow{b}\right) - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) \\
&= \overrightarrow{b}
\end{aligned}$$

et ainsi, $\overrightarrow{x}$ est bien solution de $(\star_1)$

Conclusion : l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_1$ de $(\star_1)$ est donc : $\mathcal{S}_1 = \left\{\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right\}$

(2). **Analyse :** soit $\overrightarrow{x}$ une solution de $(\star_2)$. Comme s est une symétrie, on sait que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Ainsi, en composant $(\star_2)$ par s, il vient : $f\left(\overrightarrow{x}\right) + 2\,\underbrace{s\left(s\left(\overrightarrow{x}\right)\right)}_{=\overrightarrow{x}} = s\left(\overrightarrow{b}\right)$.

Par suite, il vient que $s\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x} = s\left(\overrightarrow{b}\right)$ et donc que $s\left(\overrightarrow{x}\right) = s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{x}$.

En reportant dans $(\star_2)$, il vient : $\overrightarrow{x} + 2\left(s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$, ce qui donne $\overrightarrow{x} = \frac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)$.

Synthèse : on pose $\overrightarrow{x} = \frac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)$. Montrons que $\overrightarrow{x}$ est solution de $(\star_2)$.

On a :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} + 2s\left(\overrightarrow{x}\right) &= \frac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right) + 2s\left(\frac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)\right) \\
\underbrace{s\in\mathcal{L}(E)}&= \frac{2}{3}s\left(\overrightarrow{b}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{4}{3}\underbrace{s\circ s\left(\overrightarrow{b}\right)}_{=\overrightarrow{b}} - \frac{2}{3}s\left(\overrightarrow{b}\right) \\
&= \overrightarrow{b}
\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)$ est solution de $(\star_2)$.

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de $(\star_2)$ est : $\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)\right\}$.