EX. 1 | Réf. 4467

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

   En déduire alors la valeur de λ.
2. Justifier que X admet une espérance, puis la calculer.
3. X admet-elle une variance ?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4467

1. On pourra procéder à une réduction au même dénominateur de la somme de quotient, afin d'identifier le numérateur obtenu avec celui du quotient de gauche. On déterminera ensuite la valeur de λ en se souvenant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.
2. On établira la convergence absolue de la série $\sum n\mathbb{P}([X = n])$ pour justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, avant d'en calculer la somme.
3. On étudiera l'absolue convergence de la série $\sum n^2\mathbb{P}([X = n])$ pour justifier l'existence ou non de la variance de X.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4467

1. **Décomposition sous forme d'une somme de $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$:** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

   On a :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} &= \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{a\left(n^2+3n+2\right) + bn^2 + 2bn + cn^2 + cn}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{an^2 + 3an + 2a + bn^2 + 2bn + c^n + cn}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2(a+b+c) + n(3a+2b+c) + 2a}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

   Ainsi :
$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}\right) \underset{\substack{\textbf{Unicité des coefficients} \\ \textbf{d'un polynôme}}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

   On résout alors par échelonnement en ligne le système $\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$ à l'aide de sa réprésentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

   pour obtenir ainsi : $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Détermination de λ : Les relations : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$ permettent de définir une loi probabilité pour X si, et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X=n]) \geq 0 \\ \text{La série numérique } \displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}([X=n]) \text{ est convergente et telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1 \end{cases}.$$

Il est immédiat que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=n]) \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda \geq 0)$.

Sous l'hypothèse $\lambda \geq 0$, on a clairement que $\dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^3}$. Les séries à termes positifs $\sum \dfrac{\lambda}{n^3}$ et $\sum \mathbb{P}([X=n])$ sont de même nature d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs. Or $\sum \dfrac{\lambda}{n^3}$ et $\sum \dfrac{1}{n^3}$ sont de même nature. Comme $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, on en déduit que la série $\sum \mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right) \\
&= \lambda \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \lambda \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \right) \\
&= \lambda \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right) \right) \\
&= \lambda \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)} \right) \\
&= \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)} \right) \\
&= \frac{\lambda}{4} - \lambda \underbrace{\left(\frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \right)}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\lambda = 4$.

Conclusion : la loi de X est donc donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=n]) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$

2. Par définition on sait que X admet une espérance si, et seulement si la série numérique $\sum n\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente.

Puisque $n \times \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2}$ et que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, de manière analogue à ce qui a été fait précédemment, on en déduit que la série $\sum n\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente.

Par conséquent X, admet une espérance, qui est alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n])$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{(n+1)(n+2)} \\
&= 4\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\
&= 4\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}\right) \\
&= 4\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n+1}\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{1+1}+dsum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1+1}\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}\right) \\
&= 2-\underbrace{\frac{4}{N+2}}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0} \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 2
\end{aligned}$$
et ainsi $\mathbb{E}(X)=2$.

3. Par définition on sait que X admet une variance si, et seulement si la série numérique $\sum n^2\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente.
Puisque $n^2 \times \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n}$ et que la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, de manière analogue à ce qui a été fait précédemment, on en déduit que la série $\sum n^2\mathbb{P}([X=n])$ est divergente, donc X n'admet pas de variance.