EX. 1 | Réf. 4466

Un joueur lance deux dés parfaitement équilibrés jusqu'à ce qu'il obtienne un « double six ».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qui ont été effectués pour obtenir ce premier « double six ».

1. Donner la loi de probabilité de la variable X.
2. Montrer que X admet une espérance mathématique, puis la calculer. Comment interpréter ce résultat ?
3. On désigne maintenant par Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que la somme des deux dés soit supérieure ou égale à 10.
   a. Quelle est la loi de Y ?
   b. Montrer que Y admet une espérance mathématique, puis la calculer.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4466

1. Si on not eS un succès, c'est à dire l'apparition d'un « double six », et E un échec, S est l'événement Íélémentaire $(6,6)$ et E est l'un quelconque des couples $(x,y)\in\{1,2,3,4,5,6\}^2\setminus\{(6,6)\}$. On a par ailleurs que $\mathbb{P}(S)=\dfrac{1}{36}$ et $\mathbb{P}(E)=\dfrac{35}{36}$.

   On a alors que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X=n])=\left(\dfrac{35}{36}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{36}$.

2. Par définition, et sous réserve de convergence, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\times\mathbb{P}([X=k])\\ &= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{35}{36}\right)^{k-1}\\ &= \frac{1}{36}\times\frac{1}{\left(1-\dfrac{35}{36}\right)^2}\\ &= 36\end{aligned}$$

3. a. En utilisant les mêmes notations S et E, il vient que S est l'un des événements $(5,5)$, $(5,6)$, $(6,5)$ ou $(6,6)$ et E l'un quelconque des couples $(x,y)\in\{1,2,3,4,5,6\}^2\setminus\{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$ avec $\mathbb{P}(S)=\dfrac{1}{9}$ et $\mathbb{P}(E)=\dfrac{8}{9}$.

   Par suite $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y=n])=\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{9}$.

   b. Sur le même principe que la question précédente, on montre que $\mathbb{E}(Y)=9$.